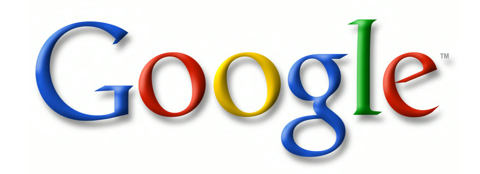
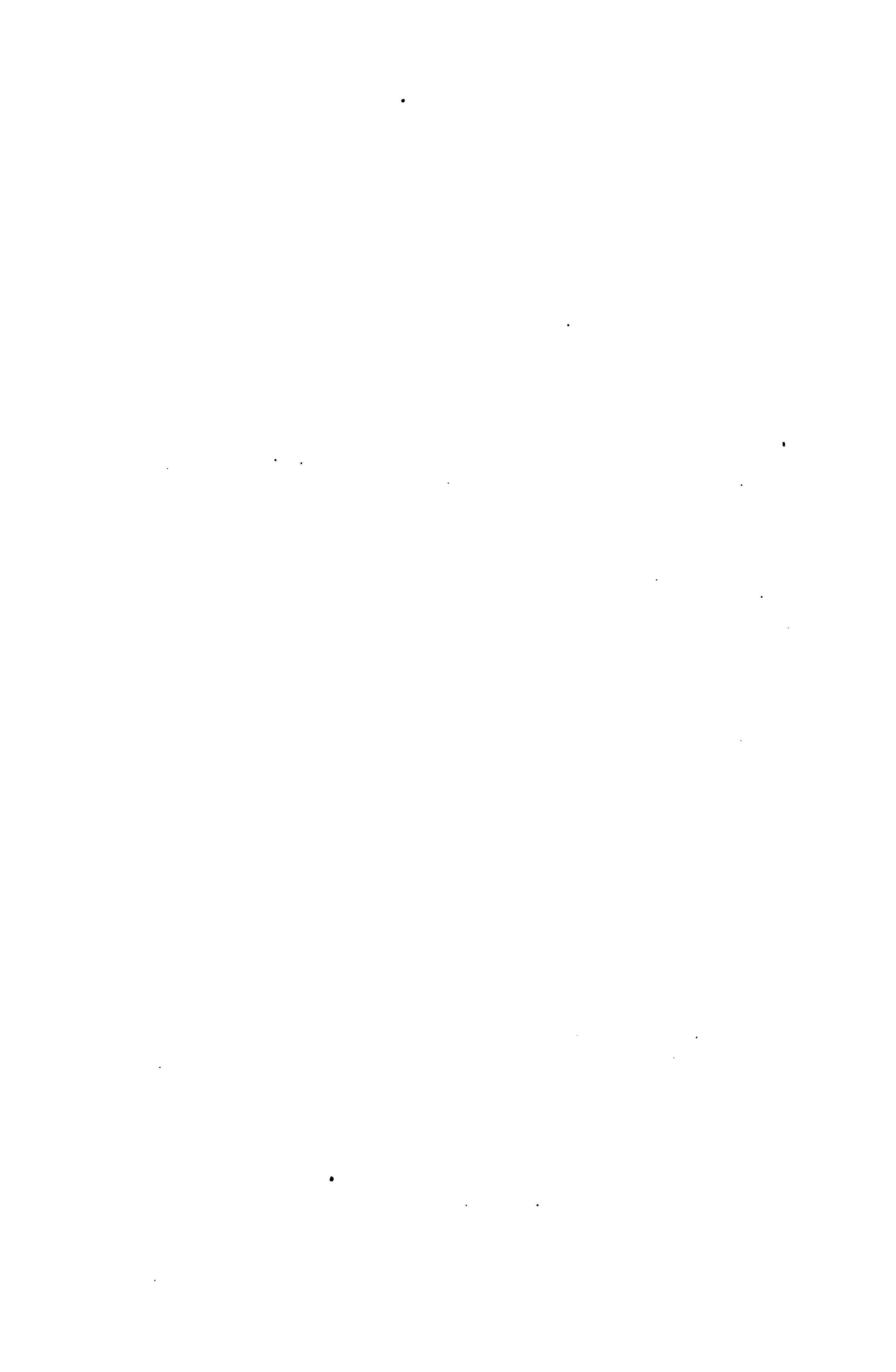





STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY







VORLESUNGEN

ÜBER

NEUERE GEOMETRIE

VON

DR. MORITZ PASCH,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU GIESSEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

Vorwort.

Bei den bisherigen Bestrebungen, die grundlegenden Theile der Geometrie in eine Gestalt zu bringen, welche den mit der Zeit verschärften Anforderungen entspricht, ist der empirische Ursprung der Geometrie nicht mit voller Entschiedenheit zur Geltung gekommen. Wenn man die Geometrie als eine Wissenschaft auffasst, welche, durch gewisse Naturbeobachtungen hervorgerufen, aus den unmittelbar beobachteten Gesetzen einfacher Erscheinungen ohne jede Zuthat und auf rein deductivem Wege die Gesetze complicirterer Erscheinungen zu gewinnen sucht, so ist man freilich genöthigt, manche überlieferte Vorstellung auszuscheiden oder ihr eine andere als die übliche Bedeutung beizulegen; dadurch wird aber das von der Geometrie zu verarbeitende Material auf seinen wahren Umfang zurückgeführt und einer Reihe von Controversen der Boden genommen.

Diese Auffassung suchen die folgenden Blätter in aller Strenge durchzuführen. Mag man immerhin mit der Geometrie noch mancherlei Speculationen verbinden; die erfolgreiche Anwendung, welche die Geometrie fortwährend in den Naturwissenschaften und im praktischen Leben erfährt, beruht jedenfalls nur darauf, dass die geometrischen Begriffe ursprünglich genau den empirischen Objecten entsprachen, wenn sie auch allmählich mit einem Netze von künstlichen Begriffen übersponnen wurden, um die theoretische Entwickelung zu fördern; und indem man sich von vornherein auf den empirischen Kern beschränkt, bleibt der Geometrie der Charakter der Naturwissenschaft erhalten, vor deren anderen Theilen jene sich dadurch auszeichnet, dass sie nur eine sehr geringe Anzahl von Begriffen und Gesetzen unmittelbar aus der Erfahrung zu entnehmen braucht.

Die Arbeit befasst sich im Wesentlichen nur mit den projectiven Eigenschaften der Figuren und geht nicht weiter, als nöthig erschien, um etwas Abgerundetes zu geben. Sie beginnt mit der

Aufzählung der erforderlichen Grundbegriffe und Grundsätze und schliesst mit der Einführung der Coordinaten und der Coordinatenrechnung für Punkte und Ebenen; eine wesentliche Folge der oben entwickelten Auffassung ist es, dass der Begriff des Punktes erst in seiner letzten Gestalt die Merkmale erhält, welche man sonst von vornherein mit dem sog. „mathematischen Punkte" zu verbinden pflegt. Perspectivität, Collineation und Reciprocität werden in Betracht gezogen, imaginäre Elemente und krumme Gebilde bleiben jedoch ausgeschlossen. Dass die projective Geometrie unabhängig von der Parallelentheorie besteht und sich ohne deren Zuziehung begründen lässt, hat zuerst Herr F. Klein bemerkt und mehrfach erörtert. Vollständig aber konnte ich die Massbegriffe nicht vermeiden, ohne den eingenommenen Standpunkt zu beeinträchtigen, und musste deshalb die Lehre von der Congruenz hineinziehen, welche bei dieser Gelegenheit bis zur Aufstellung des Polarsystemes, worin jeder Ebene der Durchschnittspunkt ihrer Senkrechten entspricht, fortgeführt wird.

Schliesslich sei bemerkt, dass die vorliegende Schrift aus akademischen Vorlesungen hervorgegangen ist, welche zuerst im Wintersemester 1873/74 gehalten wurden.

Giessen, im März 1882.

M. Pasch.

Einleitung.

Die neuere Geometrie bildet, ihrer Entstehung nach, einen Gegensatz nicht so sehr zur Geometrie der Alten, wie zur analytischen Geometrie. Von der Geometrie der Alten, wie sie von Euklid zusammengefasst, nachher stetig erweitert und vielfach umgestaltet, aber in ihrem Charakter nicht wesentlich verändert worden ist, giebt ein Theil die zum Studium der analytischen Geometrie erforderlichen Vorkenntnisse; man kann diesen Theil die Elemente nennen und jene Geometrie überhaupt die elementare wegen der gleichförmigen Einfachheit ihres Verfahrens. Die analytische Geometrie ist dem Stoffe nach eine Fortsetzung, der Methode nach ein Gegensatz zu den Elementen. In den letzteren tritt die Zahl nur auf, soweit die Natur des Problems sie bedingt, das Beweismittel ist sonst nur Construction. Die erstere dagegen nimmt die Zahlenlehre, die Analysis, überall zu Hülfe, indem sie gerade danach strebt, jede geometrische Aufgabe auf eine Rechnung zurückzuführen; die Construction wird dabei freilich nicht gänzlich ausgeschlossen.

Dass zur Lösung der höheren Probleme, soweit es sich nicht geradezu um die Auffindung von Zahlenwerthen handelt, die analytische Geometrie nicht die einzige fruchtbare Methode ist, ward bewiesen durch die Weiterentwickelung der reinen Geometrie. Vorbereitet zum Theil durch die reichlich fliessenden Resultate der Rechnung, wurden Gesichtspunkte entdeckt, welche möglichst ohne Rechnung gestatteten, verwickelte Beziehungen nicht minder leicht, als es auf dem andern Wege gelungen war oder gelingen konnte, zu beherrschen. Diese Schöpfung, welche ihre Hülfsmittel unmittelbar aus der Natur des Gegenstandes entnahm, wurde von der elementaren und von der analytischen Geometrie als reine, höhere, synthetische, auch neuere synthetische oder neuere unterschieden.

Auch die neuere Geometrie stützt sich auf die elementare. Aber obwohl man beide dem Verfahren nach als reine Geometrie bezeichnen kann, so wird man dennoch, wenn der Uebergang von

den Elementen vermittelt ist, durch die Verschiedenheit des Gepräges überrascht. In der elementaren Geometrie sind die Begriffe möglichst eng begrenzt, in der neueren sind sie weit und umfassend. In jener erfordern die verschiedenen Fälle der auf einen Lehrsatz bezüglichen Figur in der Regel ebensoviele Unterscheidungen beim Beweis, in dieser werden alle Fälle durch einen einzigen Beweis umspannt. Die analytische Geometrie hat von der synthetischen gelernt. Sie hat die neuen Gesichtspunkte sich zu eigen gemacht und verarbeitet, und bei weiterer Verschmelzung wird vielleicht eine höhere Geometrie mit einheitlichem Charakter entstehen. Die niedere Geometrie dagegen, wie sie überliefert zu werden pflegt, ist von der modernen noch wenig beeinflusst. Sollte es nun in der Sache selbst begründet sein, dass die elementaren Fragen auf schwerfälligem Wege, die höheren in durchsichtiger und verhältnissmässig einfacher Weise behandelt werden? Der Versuch hat darüber Aufschluss gegeben und zu Gunsten der neueren Geometrie entschieden. Die erweiterten Begriffe sind auch in den Elementen verwendbar, und wenn man sie an der rechten Stelle einführt, nämlich überall da, wo zuerst ihr Verständniss möglich ist, dann tritt auch früher schon ihr Nutzen zu Tage.

Die hiermit vorgezeichnete Aufgabe ist nicht neu, aber ihre strenge Durchführung steht in engstem Zusammenhang mit einer andern Aufgabe, welche noch weit weniger neu ist. Nicht bloss Schwerfälligkeit wird der elementaren Geometrie zum Vorwurf gemacht, sondern auch die Unvollkommenheit oder Unklarheit, welche den Begriffen und Beweisen in ausgedehntem Maasse noch anhaften. Die Hebung der erkannten Mängel ist unablässig erstrebt worden, auf die mannigfachste Art, und wenn man die Ergebnisse prüft, so kann man sich wohl die Meinung bilden, dass das Streben an sich ein aussichtsloses sei. Thatsächlich trifft dies nicht zu; richtig und in vollem Umfange erfasst, erscheint die Aufgabe nicht unlösbar. Sie ist allerdings durch Umstände, welche später*) zur Sprache kommen sollen, erschwert. Aber gerade in dieser Hinsicht erweist der Gedanke einer rückwirkenden Verwerthung der modernen Anschauungen seine Tragweite. Das ernste Bemühen, nach scharf ausgeprägtem Muster eine Umgestaltung vorzunehmen und der Entwickelung einen durchaus reinen Charakter zu geben, macht den Blick gegen die störenden Bestandtheile empfindlich und ruft die zu ihrer Ausscheidung nothwendige Entschiedenheit hervor. Als ein solches Muster bewährt sich die moderne Geometrie. Sie ge-

*) In § 6 und § 12.

leitet uns bis an die ersten Anfänge der Geometrie zurück, sie schärft das Gefühl für Alles, was die Reinheit der Entwickelung unterbricht, und lehrt uns jene Beimischungen, die Quellen der beklagten Unklarheit, entfernen.

Eine Darstellung der Geometrie in diesem Sinne darf natürlich keinerlei Kenntnisse voraussetzen, welche erst in der Geometrie erworben zu werden pflegen, sondern nur diejenigen, welche Jedermann zu ihrem Studium mitbringen muss. Es erfordert einige Mühe und Wachsamkeit, sich beharrlich Dinge hinwegzudenken, mit denen man vertraut ist, und auf einen Standpunkt zurückzugehen, von dem man sich weit entfernt hat. Diese Mühe ist aber bei der Prüfung der folgenden Darstellung unerlässlich, wenn der Zweck derselben erreicht werden soll.

Die geometrischen Begriffe bilden eine besondere Gruppe innerhalb der Begriffe, welche überhaupt zur Beschreibung der Aussenwelt dienen. Wenn ich die Farbe eines Gegenstandes bezeichne, so spreche ich von einer physikalischen Eigenschaft; wenn ich ihn würfelförmig nenne, so bringe ich einen geometrischen Begriff in Anwendung. Man kann die geometrischen Begriffe unter Zuziehung von Zahlenbegriffen mit einander durch eine Reihe von Beziehungen verknüpfen, in welchen keine andern Begriffe vorkommen. Die Abgrenzung der geometrischen Begriffe gegen die übrigen soll aber hier nicht versucht, vielmehr nur der Standpunkt angegeben werden, den wir im Folgenden streng festzuhalten beabsichtigen, und wonach wir in der Geometrie nichts weiter erblicken als einen Theil der Naturwissenschaft.

An einem Körper, den man „würfelförmig" nennt, lassen sich Seitenflächen, Kanten, Ecken u. s. w. unterscheiden und in gegenseitige Beziehung setzen. Dagegen bleibt die „Entfernung" zweier Körper ungenügend bestimmt, so lange man an einem von ihnen Theile unterscheiden kann, ohne die Grenzen zu verlassen, welche durch die Mittel oder durch die Zwecke der Beobachtung gezogen werden. Diese Grenzen ändern sich von Fall zu Fall; derselbe Körper, der bei der einen Gelegenheit nur als Ganzes aufgefasst werden darf, erscheint bei einer andern hierzu ungeeignet; es treten dann seine Theile als Glieder eines Systems auf, welches in geometrischer Hinsicht untersucht wird. Allemal aber werden diejenigen Körper, deren Theilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt, Punkte genannt; während das Wort „Körper" in der Geometrie zu einem andern Gebrauch vorbehalten bleibt.

Aehnlich verhält es sich mit der begrenzten (einfachen) Linie, auf der es unmöglich sein muss, unter Innehaltung der der Beobachtung gesteckten Grenzen verschiedene Wege zwischen denselben Punkten zurückzulegen; je zwei Theile stossen höchstens in einem Punkte aneinander. Die geschlossene (einfache) Linie setzt sich aus zwei begrenzten Linien zusammen. Theile einer Fläche dürfen nur in Punkten oder Linien aneinanderstossen. Die Anwendung dieser Begriffe bleibt mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, wie dies bei fast allen Begriffen, die wir zur Auffassung der Erscheinungen geschaffen haben, der Fall ist.

§ 1. Von der geraden Linie.

Wir werden uns zunächst mit der geraden Linie beschäftigen. Man sagt: durch zwei Punkte kann man eine gerade Linie ziehen. Die Linie kann aber verschieden begrenzt werden; die Unbestimmtheit der Begrenzung hat dahin geführt, dass von der geraden Linie gesagt wird, sie sei nicht begrenzt, sie müsse unbegrenzt, in unendlicher Ausdehnung „vorgestellt werden". Diese Forderung entspricht keinem wahrnehmbaren Object; vielmehr wird unmittelbar aus den Wahrnehmungen nur die wohlbegrenzte gerade Linie, der gerade Weg zwischen zwei Punkten, die gerade Strecke aufgefasst. Den letzten Ausdruck wollen wir festhalten und sprechen

1) von einer zwischen zwei Punkten gezogenen geraden Strecke,

2) von Punkten, welche innerhalb einer geraden Strecke liegen.

Alle Wendungen, welche in diesem Paragraphen vorkommen, lassen sich auf die beiden angegebenen zurückführen. Wir werden meist „Strecke" statt „gerade Strecke" sagen. Ist eine Strecke zwischen den Punkten A und B (oder B und A) gezogen, so wird auch gesagt: die Strecke verbindet A mit B, sie geht von A nach B, sie hat die Endpunkte A und B, sie ist durch die Punkte A und B begrenzt. Wenn ein Punkt C „Punkt einer Strecke" genannt oder behauptet wird, C gehört der Strecke an, die Strecke geht durch C, so ist gemeint, dass C entweder innerhalb der Strecke gelegen oder ein Endpunkt ist. Ein Punkt, von dem dies nicht gilt, liegt „ausserhalb der Strecke".

Die folgende Betrachtung soll uns mit den Eigenschaften bekannt machen, welche an den geraden Strecken und ihren Punkten bemerkt werden. Wir sprechen dieselben in Form von einzelnen Sätzen aus. Die Sätze werden aber in verschiedener Weise eingeführt. Einige von ihnen werden bewiesen, d. h. es wird ge-

zeigt, wie ihr Inhalt bedingt ist durch andere Sätze; die beim Beweise benutzten Sätze müssen jedesmal vorangehen. Wir stellen nun die Sätze, welche bewiesen werden, als Lehrsätze (Theoreme) den andern gegenüber, die wir als Grundsätze bezeichnen. Die Lehrsätze werden aus den Grundsätzen deducirt, so dass Alles, was zur Begründung der Lehrsätze gehört, ohne Ausnahme sich in den Grundsätzen niedergelegt finden muss.

Die primitivsten Beobachtungen über die geraden Strecken und ihre Punkte liefern eine Reihe von Beziehungen; ein Theil der letzteren bildet den Inhalt der Grundsätze in diesem Paragraphen. Wie auch die Punkte A und B angenommen werden (in den am Ende dieses Paragraphen näher zu erörternden Grenzen), immer kann man A mit B durch eine gerade Strecke verbinden; aber man kann dies nicht auf mehrere Arten leisten. Innerhalb der Strecke kann ein Punkt C angenommen werden. Man kann von A nach C eine gerade Strecke ziehen; diese geht nicht durch B; aber mit allen ihren Punkten fällt sie in die vorige Strecke. Wenn man also A mit C und C mit B verbindet, so begegnet man keinem Punkte, der nicht schon in der ersten Strecke anzutreffen war; aber die Punkte der ersten Strecke werden auch ihrerseits durch jene beiden Strecken erschöpft. Die Grundsätze I.—V. geben diese Bemerkungen wieder.

$A \qquad C \qquad B$

I. Grundsatz. — Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen, und zwar nur eine.

Demnach reicht die Angabe der Endpunkte zur Bezeichnung der Strecke hin. Die Strecke von A nach B wird mit AB oder BA bezeichnet.

II. Grundsatz. — Man kann stets einen Punkt angeben, der innerhalb einer gegebenen geraden Strecke liegt.

III. Grundsatz. — Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so liegt der Punkt A ausserhalb der Strecke BC.

Ebenso liegt der Punkt B ausserhalb der Strecke AC.

IV. Grundsatz. — Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so sind alle Punkte der Strecke AC zugleich Punkte der Strecke AB.

Oder: Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, der Punkt D innerhalb der Strecke AC oder BC, so liegt D auch innerhalb der Strecke AB.

V. Grundsatz. — Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so kann ein Punkt, der keiner der Strecken AC und BC angehört, nicht zur Strecke AB gehören.

Oder: Liegen die Punkte C und D innerhalb der Strecke AB, der Punkt D ausserhalb der Strecke AC, so liegt der Punkt D innerhalb der Strecke BC.

Wenn wir nun den Punkt C innerhalb der Strecke AB und den Punkt D innerhalb der Strecke BC annehmen, so zeigt sich, dass der Punkt C innerhalb der Strecke AD liegt. Diese Bemerkung drängt sich ebenso unmittelbar auf, wie die vorhergehenden; allein sie lässt sich mit ihnen in einen Zusammenhang bringen, dessen Angabe nicht unterbleiben darf. So kommt es, dass die neue Beziehung nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz auftritt.

1. Lehrsatz. — Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, der Punkt D innerhalb der Strecke BC, so liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AD.

$A \quad C \quad D \quad B$

Beweis. — Da der Punkt D innerhalb der Strecke BC angenommen wird, so liegt C ausserhalb der Strecke BD (III); da C innerhalb der Strecke AB, D innerhalb der Strecke BC, so liegt D auch innerhalb der Strecke AB (IV); da C und D innerhalb der Strecke AB, C ausserhalb der Strecke BD, so liegt C innerhalb der Strecke AD (V).

Die Strecke CD heisst ein Theil der Strecke AB, wenn die letztere alle Punkte der ersteren enthält, aber nicht bloss diese (Definition 1).

2. Lehrsatz. — Sind C und D Punkte der Strecke AB und mindestens einer von ihnen innerhalb derselben gelegen, so ist die Strecke CD ein Theil der Strecke AB.

Beweis. — Es liege C innerhalb der Strecke AB. Dann gehört D zu einer der beiden Strecken AC oder BC (V), etwa zu BC; folglich liegt C innerhalb der Strecke AD (1), und A ist kein Punkt der Strecke CD (III), deren sämmtliche Punkte zur Strecke AD gehören (IV) und mithin auch zur Strecke AB (IV), d. h. die Strecken CD und AB stehen in der durch Def. 1 geforderten Beziehung.

Der erste Grundsatz ist schon bei der Formulirung der übrigen benutzt worden; denn ohne ihn konnte nicht von „der“ Strecke AB, von „der“ Strecke BC u. s. w. die Rede sein. Einer so trivialen Aussage, wie sie z. B. der dritte Grundsatz enthält, erst eine besondere Fassung zu geben, wird leicht für zwecklos gehalten werden. Aber sie ist in den vorstehenden Beweisen in Anwendung gebracht worden, und wir nehmen uns vor, von allen Beweisgründen ohne Unterschied Rechenschaft abzulegen, auch von den unscheinbarsten*).

*) Vgl. § 12 Schluss.

Wenn der Punkt B innerhalb der Strecke AC angenommen wird, so setzen die Strecken AB und BC die Strecke AC zusammen, und man kann dann sagen: Die Strecke BC ist eine Verlängerung der Strecke AB über B hinaus, die Strecke AB ist über B hinaus bis C verlängert. Wie auch die Punkte A und B angenommen werden (in den am Ende dieses Paragraphen näher zu erörternden Grenzen), immer kann man die Strecke AB über A hinaus und über B hinaus verlängern. Verlängert man nun die Strecke AB erst über B hinaus bis C, dann wieder über B hinaus bis D, so entstehen die Strecken AC und AD, von denen die eine mit allen ihren Punkten in die andere fällt. Wird die Strecke AB erst über B hinaus bis C, dann aber über A hinaus bis E verlängert und C mit E durch eine gerade Strecke verbunden, so fällt die Strecke AB mit allen ihren Punkten in die Strecke CE. Wir erhalten somit drei weitere Grundsätze, die letzten, welche in diesem Paragraphen noch zu geben sind.

VI. Grundsatz. — Sind A und B beliebige Punkte, so kann man den Punkt C so wählen, dass B innerhalb der Strecke AC liegt.

VII. Grundsatz. — Liegt der Punkt B innerhalb der Strecken AC und AD, so liegt entweder der Punkt C innerhalb der Strecke AD oder der Punkt D innerhalb der Strecke AC.

A B C D

VIII. Grundsatz. — Liegt der Punkt B innerhalb der Strecke AC und der Punkt A innerhalb der Strecke BD, und sind CD durch eine gerade Strecke verbunden, so liegt der Punkt A auch innerhalb der Strecke CD.

D A B C

Ebenso liegt dann auch der Punkt B innerhalb der Strecke CD. —

Drei Punkte, von denen einer innerhalb der durch die beiden andern begrenzten geraden Strecke liegt, mögen eine gerade Reihe heissen (Definition 2).

3. Lehrsatz. — Bilden die Punkte ABC und ABD gerade Reihen, so gilt dies auch von den Punkten ACD und BCD.

Beweis. — Der Voraussetzung zufolge liegt (Def. 2) entweder A innerhalb der Strecke BC oder B innerhalb AC oder C innerhalb AB; zugleich liegt (Def. 2) entweder A innerhalb BD oder B innerhalb AD oder D innerhalb AB. Liegen C und D innerhalb AB, so liegt (V) entweder D innerhalb BC und (1) C innerhalb AD, oder D innerhalb AC und (1) C innerhalb BD. Liegt C innerhalb und D ausserhalb AB, so können wir für die Punkte A und B die Be-

A C D B

zeichnung derart wählen, dass die Strecke AD durch B geht; es geht dann (IV) AD auch durch C und (1) CD durch B. Liegt C ausserhalb AB, so bezeichnen wir die Punkte A und B derart, dass die Strecke AC durch B geht. Entweder liegt jetzt A innerhalb BD, mithin (VIII) A und B innerhalb CD; oder B innerhalb AD, mithin (VII) entweder C innerhalb AD und (1) BD, oder D innerhalb AC und (1) BC; oder D innerhalb AB, mithin (IV) D innerhalb AC und (1) B innerhalb CD. Demnach bilden ACD und BCD in allen Fällen gerade Reihen (Def. 2).

Bei der hier in Betreff der Punkte ABC gemachten Annahme wird der über die Punkte A und B führende gerade Weg, gehörig ausgedehnt, den Punkt C überschreiten. Man sagt deshalb (Definition 3): C liegt in der geraden Linie der Punkte A und B, kürzer: in der geraden Linie AB oder in der Geraden AB (oder BA). Gleichbedeutend ist: Die Gerade AB geht durch C, ist durch C gelegt, C ist ein Punkt der Geraden AB, u. s. w. Die Aussagen: A liegt in der Geraden BC, B liegt in der Geraden AC, C liegt in der Geraden AB, haben einerlei Sinn. Wie auch die Punkte C und D angenommen werden, immer existirt eine Gerade, welche durch sie hindurchgeht; denn nimmt man etwa (I, II) A innerhalb der Strecke CD und (I, II) B innerhalb der Strecke AC, so sind (Def. 2) ABC und (1) ABD gerade Reihen, d. h. (Def. 3) die Gerade AB geht durch C und D; ebenso wenn man (VI) A und B so nimmt, dass C innerhalb der Strecke AD und D innerhalb der Strecke AB (IV). Daher gilt der

4. **Lehrsatz.** — Durch zwei beliebige Punkte kann man stets eine gerade Linie legen.

Es sei A' ein Punkt der Geraden AB (also A ein Punkt der Geraden $A'B$). Wenn C ebenfalls einen Punkt der Geraden AB bedeutet, so ist C entweder von A' verschieden oder nicht. Im ersten Falle sind (Def. 3) ABC und ABA' gerade Reihen, folglich (3) auch BCA', d. h. C in der Geraden $A'B$ (Def. 3). Trifft man nun die Bestimmung, dass auch A und B Punkte der Geraden AB genannt werden, also A' ein Punkt der Geraden $A'B$, so gehört auch im zweiten Falle C zur Geraden $A'B$. (Im ersten Falle ist dann nachträglich noch die Möglichkeit des Zusammenfallens von C mit A oder B zu berücksichtigen, welche am Resultat nichts

ändert; A' jedoch setzen wir von A und B verschieden voraus.) Hiernach liegen alle Punkte der Geraden AB in der Geraden $A'B$, ebenso alle Punkte der Geraden $A'B$ in der Geraden AB; die Aussage „C liegt in der Geraden AB“ ist mit der Aussage „C liegt in der Geraden $A'B$“ identisch, und man sagt daher: Die Geraden AB und $A'B$ fallen mit einander zusammen. Nimmt man jetzt zwei Punkte A' und B' in der Geraden AB beliebig, so fallen die Geraden AB und $A'B'$ mit einander zusammen, und schliesslich auch die Geraden AB und CD, wenn beide durch A' und B' gelegt sind. Dies ist in folgendem Satze ausgesprochen.

5. Lehrsatz. — Jede Gerade ist durch zwei beliebige von ihren Punkten bestimmt, d. h.: Alle Geraden, welche zwei Punkte gemein haben, fallen mit einander zusammen.

Häufig wird zur Bezeichnung einer Geraden statt der Nebeneinanderstellung zweier Punkte ein besonderer Buchstabe benutzt.

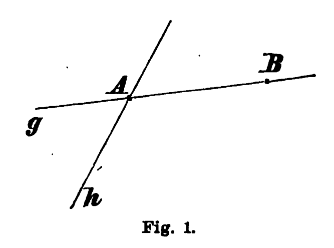


Fig. 1.

Sind A und B Punkte der Geraden g, so bedeutet g die Gerade AB (5); man sagt: Die Gerade g verbindet A mit B. Alle Punkte der Strecke AB gehören zur Geraden g (Def. 3); man nennt diese Strecke eine Strecke der Geraden g. In den Figuren wird die Gerade durch eine ihrer Strecken repräsentirt.

Wenn zwei Geraden g und h einen Punkt A gemein haben, so haben sie ausserdem keinen Punkt gemein (5). Man sagt: Die Geraden g und h treffen (schneiden) sich im Punkte A; diesen nennt man den Durchschnittspunkt der beiden Geraden und bezeichnet ihn mit gh.

Wir ziehen zunächst nur eine einzige Gerade in Betracht. Sind A, B, C Punkte einer Geraden g, also C in der Geraden AB gelegen (5), so bilden (Def. 3) die drei Punkte eine gerade Reihe, d. h. (Def. 2) es liegt entweder A innerhalb der Strecke BC, oder B innerhalb der Strecke AC, oder C innerhalb der Strecke AB.

g A C B

Liegt etwa C innerhalb der Strecke AB, so sagt man: Der Punkt C liegt in der Geraden g zwischen A und B, A und C auf derselben Seite von B, B und C auf derselben Seite von A, A und B auf verschiedenen Seiten von C. Aber A liegt alsdann nicht zwischen B und C, ebenso B nicht zwischen A und C (II). Daher der

6. Lehrsatz. — Liegen drei Punkte in einer geraden Linie, so liegt einer von ihnen zwischen den beiden andern. — Und:

7. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C in einer geraden Linie, C zwischen A und B, so liegt weder A zwischen B und C, noch B zwischen A und C.

Wenn wir an Stelle der ursprünglich eingeführten Begriffe die neuen setzen: 1) Punkt in einer geraden Linie, 2) Punkt zwischen zwei Punkten (in der Geraden), so werden alle Sätze neu formulirt. Wir gehen zuerst die Grundsätze I.—VI. durch und bringen ihren Inhalt, soweit er nicht schon in die Lehrsätze 4.—7. übergegangen ist, durch folgende vier Sätze zum Ausdruck:

8. Lehrsatz. — Sind in einer Geraden zwei Punkte A und B gegeben, so kann man in ihr stets C so wählen, dass C zwischen A und B liegt.

9. Lehrsatz. — Sind in einer Geraden zwei Punkte A und B gegeben, so kann man in ihr stets C so wählen, dass A zwischen B und C liegt.

10. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C, D in einer Geraden, C zwischen A und B, D zwischen A und C, so liegt D auch zwischen A und B.

11. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C, D in einer Geraden, C und D zwischen A und B, aber D nicht zwischen A und C, so liegt D zwischen B und C.

Die beiden letzten Sätze lassen sich durch einen einzigen ersetzen, der durch Benutzung von 6. 10. 11. zu Stande kommt. Es seien nämlich A, B, C, D Punkte einer Geraden, D zwischen A und B gelegen; dann liegt (6) entweder C zwischen A und B, so dass der 11. Lehrsatz zur Anwendung kommt, oder A zwischen B und C und mithin (10) D zwischen B und C, oder B zwischen A und C und mithin (10) D zwischen A und C, d. h.:

12. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C, D in einer Geraden, D zwischen A und B, so liegt D entweder zwischen A und C oder zwischen B und C.

Hierin ist in der That der 11. Satz unmittelbar enthalten; der 10. ergiebt sich aus 7. und 12. folgendermassen. Es seien A, B, C, D Punkte einer Geraden, welche die im 10. Lehrsatze gemachten Voraussetzungen erfüllen. Da C zwischen A und B, so ist (12) C zwischen A und D oder zwischen B und D; da D zwischen A und C, so ist (12) D zwischen A und B oder zwischen B und C. Nun ist (7) C nicht zwischen A und D, also C zwischen B und D, mithin (7) D nicht zwischen B und C, sondern D zwischen A und B.

Aus 7. 10. 11., also auch aus 7. 12., kann man, dem 1. Lehrsatze entsprechend, den folgenden beweisen:

13. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C, D in einer

Geraden, C zwischen A und B, D zwischen B und C, so liegt C zwischen A und D.

Dem siebenten Grundsatze entspricht:

14. Lehrsatz. — Liegen A, B, C, D in gerader Linie, B zwischen A und C, zugleich B zwischen A und D, so liegt A nicht zwischen C und D.

Diesen kann man aber aus 7. und 12. herleiten, mit Benutzung von 13. Läge nämlich unter jenen Voraussetzungen A zwischen C und D, so läge (13) A zwischen B und D, während doch B zwischen A und D liegen soll (7).

Nach (6) liegt entweder C zwischen A und D und mithin (13) zwischen B und D, oder D zwischen A und C und mithin (13) zwischen B und C, jedenfalls (7) B nicht zwischen C und D, d. h.:

15. Lehrsatz. — Liegen A, B, C, D in gerader Linie, B zwischen A und C, zugleich B zwischen A und D, so liegt B nicht zwischen C und D.

Man braucht nur B mit D zu vertauschen, um hierin eine Ergänzung des zwölften Lehrsatzes zu erkennen, nach welcher die beiden in ihm ausgesprochenen Möglichkeiten sich gegenseitig ausschliessen. Diese Ergänzung hat sich aber als eine Folge der Sätze 6. 7. 12. erwiesen.

Dem achten Grundsatze endlich entspricht:

16. Lehrsatz. — Liegen A, B, C, D in gerader Linie, A zwischen B und C, B zwischen A und D, so liegt A zwischen C und D.

Diesen kann man ebenfalls aus 6. 7. 12. herleiten. Denn läge (6) C zwischen A und D, so läge (7 und 11) C zwischen B und D, folglich B zwischen A und C (13); wäre D zwischen A und C, so wäre auch B zwischen A und C (10). Beides ist unmöglich (7).

Während zur Bestimmung einer Strecke die beiden Endpunkte erforderlich sind, dürfen zur Bestimmung der Geraden zwei beliebige von ihren Punkten genommen werden. Dieser Umstand hat zur Folge, dass für den Grundsatz I. die Lehrsätze 4. 5. 6. eintreten, für die Grundsätze IV. V. VII. VIII. dagegen nur der eine Lehrsatz 12.; die Grundsätze II. III. VI. haben resp. die Lehrsätze 8. 7. 9. geliefert. Aus den Sätzen 4.—9. und 12., oder aus 4.—11., können dieselben Folgerungen gezogen werden, welche man an die Grundsätze zu knüpfen vermag. Von Interesse sind hier nur die beiden folgenden Sätze.

17. Lehrsatz. — Hat man in einer Geraden eine beliebige (endliche) Menge von Punkten, so kann man zwei Punkte herausheben, zwischen denen alle übrigen liegen.

Beweis. — Hebt man die Punkte A, B beliebig heraus, so werden im Allgemeinen die übrigen Punkte theils zwischen A und B liegen, theils nicht. Zur letzteren Gattung mag etwa C gehören, und zwar mag B zwischen A und C liegen (6). Dann befinden sich (10) die zwischen A und B gelegenen Punkte auch zwischen A und C, und überdies der Punkt B, vielleicht noch andere von den gegebenen Punkten. Wenn ein Theil derselben nicht zwischen A und C liegt, so wird A oder C durch einen neuen Punkt ersetzt. U. s. w.

18. Lehrsatz. — Hat man in einer Geraden eine beliebige Menge von Punkten, so kann man in ihr zwei Punkte so angeben, dass zwischen ihnen alle gegebenen liegen.

Beweis. — Unter den gegebenen Punkten kann man (17) zwei herausheben, zwischen denen alle übrigen liegen, etwa E und F. Man wähle jetzt (9) in der gegebenen Geraden den Punkt M so, dass E zwischen F und M liegt, und dann (9) den Punkt N so, dass F zwischen M und N liegt. Nach (10) befinden sich alle zwischen E und F gelegenen Punkte auch zwischen M und F, mithin auch (10) zwischen M und N. Dasselbe gilt von E (10) und F, also von allen gegebenen Punkten.

Die Lehrsätze 4. 5. drücken die Eigenthümlichkeit der geraden Linie aus. Die Sätze 6.—11. dagegen passen auf jede begrenzte (sich selbst nirgends schneidende oder berührende) Linie. Wenn man innerhalb einer solchen drei Punkte A, B, C annimmt, so liegt einer von ihnen zwischen den beiden andern; liegt C zwischen A und B, so liegt A nicht zwischen B und C, u. s. w. Es werden also sämmtliche Sätze passen, welche aus 6.—11. allein entspringen.

Wenn man dagegen drei Punkte A, B, C auf einer geschlossenen (sich selbst nirgends schneidenden oder berührenden) Linie wählt, so hat es keinen Sinn zu sagen, etwa dass C zwischen A und B liege, weil von A nach B auf jener Linie zwei Wege führen, von denen einer über C geht, der andere nicht. Indess lässt sich doch ein ähnlicher Begriff erzeugen. Ich nehme in der gegebenen Linie einen beliebigen Punkt E und bestimme, dass nur solche Wege zugelassen werden, welche den Punkt E ausschliessen. Dann giebt es von A nach B nur noch einen Weg; führt dieser über C, so liegt C zwischen A und B unter Beachtung der getroffenen Bestimmung, und ich sage: bei ausgeschlossenem E liegt C zwischen A und B (oder B

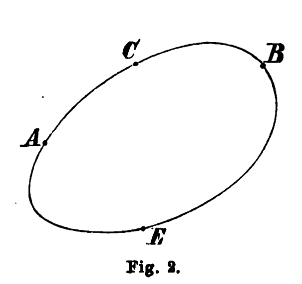


Fig. 2.

und A). Den Punkt E will ich dabei als „Grenzpunkt“ bezeichnen.

Mit dem neuen Begriffe kann man operiren, wie mit dem auf die begrenzte Linie bezüglichen, und es gelten wieder die Sätze 6.—11., wenn E eingeführt und der Zusatz „bei ausgeschlossenem E“ oder „für den Grenzpunkt E“ überall angebracht wird. Der neue Begriff bezieht sich auf vier Punkte A, B, C, E in einer geschlossenen Linie. Er ist anzuwenden, wenn von den Wegen, welche von A nach B gehen, der eine über C führt und nicht zugleich über E; dann führt aber der andere Weg über E und nicht zugleich über C, d. h. für den Grenzpunkt C liegt E zwischen A und B. Die Punkte C und E können daher ihre Rollen vertauschen, und da man von A nach B nicht gelangen kann, ohne einem von ihnen zu begegnen, so sagt man: A und B werden durch C und E (oder E und C) getrennt.

Indem wir jetzt die Sätze 6.—11. auf die geschlossene Linie übertragen, entstehen die nachstehend unter b—f aufgeführten Sätze, denen wir einen nur für die geschlossene Linie gültigen vorausschicken, nämlich

a) Liegt C zwischen A und B bei ausgeschlossenem E, so liegt E zwischen A und B bei ausgeschlossenem C.

Hier, wie in den folgenden Sätzen, ist nur von Punkten einer und derselben geschlossenen Linie und von ihrer Lage in dieser Linie die Rede.

b) Bei ausgeschlossenem E liegt entweder A zwischen B und C, oder B zwischen A und C, oder C zwischen A und B, und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden andern aus.

c) Liegt für den Grenzpunkt E der Punkt C zwischen A und B, der Punkt D zwischen A und C, so liegt D auch zwischen A und B für den Grenzpunkt E.

d) Liegen für den Grenzpunkt E die Punkte C und D zwischen A und B, so liegt für denselben Grenzpunkt der Punkt D entweder zwischen A und C oder zwischen B und C.

e) Wenn drei Punkte A, B, E gegeben sind, so kann man C so wählen, dass C zwischen A und B für den Grenzpunkt E.

f) Wenn drei Punkte A, B, E gegeben sind, so kann man D so wählen, dass B zwischen A und D für den Grenzpunkt E.

Jetzt ist aber der letzte Satz von vorhergehenden abhängig; er kann aus a, b, e hergeleitet werden. Zuerst nämlich zieht man aus a und b eine Folgerung.

g) Werden AB durch CE getrennt, so werden auch CE durch AB getrennt.

Beweis. — Der Voraussetzung zufolge liegt C zwischen A und B für den Grenzpunkt E und (a) E zwischen A und B für den Grenzpunkt C. Nach (b) werden also BC durch AE nicht getrennt, ebensowenig BE durch AC. Folglich (a) liegt E nicht zwischen B und C, C nicht zwischen B und E bei ausgeschlossenem A. Es bleibt daher (b) nur die Möglichkeit übrig, dass B zwischen C und E bei ausgeschlossenem A, d. h. dass CE durch BA (oder AB) getrennt werden. — Die Beobachtung lehrt in der That, dass dies stattfindet, sobald AB durch CE getrennt sind; aber die Benutzung der Sätze a und b führt zu demselben Ergebniss.

Wenn nun E, B, A gegeben sind, kann ich D so wählen (e), dass D zwischen B und E bei ausgeschlossenem A, d. h. BE durch DA getrennt, also DA durch BE (g), d. h. B zwischen A und D bei ausgeschlossenem E.

Aus den Sätzen 6. 7. 10. 11. wurden 12.—17. gefolgert. Mit den Sätzen b, c, d kann man ganz analog verfahren; von den Ergebnissen sollen nur die beiden angeführt werden, welche den Nummern 12. und 15. entsprechen.

h) Liegt D für den Grenzpunkt E zwischen A und B, aber nicht zwischen B und C, so liegt D für denselben Grenzpunkt zwischen A und C.

i) Liegt D für den Grenzpunkt E zwischen A und B, zugleich zwischen A und C, so liegt D für denselben Grenzpunkt nicht zwischen B und C.

Unter Berücksichtigung von (g) schliesst man jetzt: Werden DE durch AB getrennt, durch BC aber nicht, so werden DE durch AC getrennt; werden DE durch AB und durch AC getrennt, so werden DE durch BC nicht getrennt; sind DE weder durch AC noch durch BC getrennt, so sind sie auch nicht durch AB getrennt; d. h.:

k) Sind AB durch eines der Paare CE und DE getrennt, durch das andere aber nicht, so sind AB durch CD getrennt. Und:

l) Sind AB durch die Paare CE und DE getrennt, oder durch beide nicht getrennt, so sind AB auch durch CD nicht getrennt. Oder: Sind AB durch CD getrennt, so sind AB durch eines der Paare CE und DE getrennt, durch das andere aber nicht.

Die Sätze a—e können wir als Grundsätze bezeichnen; aus ihnen wurden die Sätze f—l hergeleitet. Wie 10. und 11. aus 7. und 12., so folgen c und d aus b und h, oder auch aus a, b und k, da h eine Folge von g und k, g eine Folge von a und b ist. Mit Hülfe der Sätze a, b, e, k und zwar ausschliesslich mit deren Hülfe lassen sich demnach alle übrigen Sätze der Gruppe a—l beweisen.

Unter Annahme eines festen Punktes E ist es gelungen, an der geschlossenen Linie die Beobachtungen, welche sich an der begrenzten Linie dargeboten hatten, zu wiederholen; die geschlossene Linie wurde durch Ausschluss des Punktes E mit der begrenzten in vollständige Analogie gebracht. Es lässt sich aber auch umgekehrt der Begriff getrennter Paare auf die begrenzte Linie übertragen; in welcher Weise dies zu geschehen hat, lehren die Sätze k und l. Indem wir uns auf die gerade Linie beschränken, geben wir jetzt folgende Definition. Liegt in einer geraden Linie von den Punkten C, D der eine zwischen A und B, der andere aber nicht, so sagen wir (Definition 4): Die Punkte AB werden durch CD getrennt, oder: bei ausgeschlossenem D (für den Grenzpunkt D) liegt C zwischen A und B. Die Vertauschbarkeit von A mit B, von C mit D ist in der Definition selbst begründet. Es gilt daher in der geraden Linie der Satz a, und es soll gezeigt werden, dass auch die Sätze b, e, k ihre Gültigkeit behalten. Dass die Sätze a—l sämmtlich fortbestehen, bedarf alsdann keines Beweises.

19. Lehrsatz. — Sind A, B, C, E Punkte in einer Geraden, so werden entweder BC durch AE getrennt, oder CA durch BE, oder AB durch CE, und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden andern aus.

Beweis. — Die Punkte A, B, C können derart bezeichnet werden, dass A zwischen B und C liegt (6). Nun befindet sich entweder B zwischen C und E, oder C zwischen B und E, oder E zwischen B und C (6). Im ersten Falle liegt B zwischen C und E, A zwischen B und C, folglich A zwischen C und E (10), B zwischen A und E (13); folglich werden (Satz 7. und Def. 4) BC durch AE getrennt, aber CA nicht durch BE, AB nicht durch CE. Der zweite Fall entsteht durch Vertauschung von B und C und führt daher zu demselben Ergebniss. Im dritten Falle liegen A und E zwischen B und C, folglich A entweder zwischen B und E oder zwischen C und E (11). Liegt A zwischen B und E, mithin E zwischen A und C (13), so werden (Satz 7. und Def. 4) AC durch BE getrennt, aber BC nicht durch AE, AB nicht durch CE. Liegt A zwischen C und E, so werden AB durch CE getrennt, aber BC nicht durch AE, AC nicht durch BE (Sätze 7. 13. und Def. 4).

20. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, E in einer geraden Linie, so kann man in ihr C so wählen, dass AB durch CE getrennt werden.

Beweis. — Liegt E nicht zwischen A und B, so wähle man

C zwischen A und B (8). Liegt E zwischen A und B, so wähle man C so, dass B zwischen A und C oder A zwischen B und C (9), also C nicht zwischen A und B (7). Beidemal werden AB durch CE getrennt (Def. 4).

21. Lehrsatz. — Sind in einer Geraden die Punkte AB durch eines der Paare CE und DE getrennt, durch das andere aber nicht, so sind AB durch CD getrennt.

Beweis. — Es seien AB etwa durch CE getrennt, durch DE nicht getrennt. Liegt nun C zwischen A und B, also (Def. 4) E nicht, so ist (Def. 4) auch D nicht zwischen A und B gelegen. Liegt aber C nicht zwischen A und B, so befindet sich (Def. 4) E zwischen diesen beiden Punkten, mithin (Def. 4) auch D. Beidemal werden AB durch CD getrennt (Def. 4).

Hiermit ist die Uebertragung der Sätze a, b, e, k in solche, welche sich auf Punkte in einer geraden Linie beziehen, ausgeführt. An die drei erhaltenen Sätze schliessen sich ohne Weiteres die Folgerungen an, welche den übrigen Sätzen der vorigen Gruppe entsprechen. Die Sätze g und l gehen in die beiden folgenden über:

22. Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). — Sind A, B, C, D, E Punkte in einer Geraden und werden AB durch CD getrennt, so werden AB durch eines der Paare CE und DE getrennt, durch das andere aber nicht.

23. Lehrsatz. — Werden in einer Geraden die Punkte AB durch CE getrennt, so werden auch CE durch AB getrennt.

Durch diese Ergebnisse wird es möglich, die gerade Linie ähnlich wie eine geschlossene zu behandeln. —

Im Laufe der Entwickelung traten zu den ursprünglich eingeführten geometrischen Begriffen neue hinzu, welche jedoch auf jene zurückzuführen sind. Wir wollen dieselben abgeleitete Begriffe nennen, die anderen Grundbegriffe. Die abgeleiteten Begriffe wurden definirt, wobei allemal die vorhergehenden benutzt wurden, keine anderen; und so oft ein abgeleiteter Begriff zur Anwendung kam, wurde unmittelbar oder mittelbar auf seine Definition Bezug genommen; ohne eine solche Berufung war die betreffende Beweisführung nicht möglich. Die Grundbegriffe sind nicht definirt worden; keine Erklärung ist im Stande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständniss jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschliesst, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjecte. Wenn Euklid sagt: „Ein Punkt ist, was keine Theile hat; eine Linie ist Länge ohne Breite; eine gerade Linie (Strecke) ist diejenige, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt", so erklärt er die angeführten Begriffe

durch Eigenschaften, welche sich zu keiner Verwerthung eignen, und welche auch von ihm bei der weiteren Entwickelung nirgends verwerthet werden. In der That stützt sich keine einzige Stelle auf eine jener Aussagen, durch welche der Leser, der aus den „Elementen“ ohne eine bereits vorher durch wiederholte Beobachtungen ausgebildete Vorstellung von den geometrischen Grundbegriffen überhaupt nichts lernen kann, höchstens an die betreffende Vorstellung erinnert und dazu veranlasst wird, sie den wissenschaftlichen Anforderungen gemäss einzuschränken oder zu ergänzen.

Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungsthatsachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern „bewiesen“ werden; die (ausser den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung nothwendigen Erkenntnisse bilden selbst einen Theil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Sätze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet*), freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben, welche klarer erfasst werden, als die irgend einer andern Art, und mit denen die Menschen deshalb längst so vertraut geworden sind, dass ihr Ursprung in Vergessenheit gerathen und Gegenstand des Streites werden konnte.

Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so dass man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht. Um so vorsichtiger müssen von vornherein etwaige Einschränkungen festgestellt werden, denen die Anwendung einzelner Grundsätze unterliegt. Bei einem Theile der oben aufgestellten geometrischen Grundsätze, nämlich bei I. und VI., sind nun solche Einschränkungen geltend zu machen. Im ersten Grundsatze dürfen die durch eine gerade Strecke zu verbindenden Punkte nicht zu nahe bei einander angenommen werden. So lange alle in Betracht gezogenen Punkte durch Zwischenräume getrennt sind, erscheint der Vorbehalt überflüssig. Das ist in der That bei den Figuren der Fall, aus deren Anschauung man die Grundsätze schöpft; für solche Figuren wird daher der achte Lehrsatz — der einzige, der

*) Den empirischen Ursprung der geometrischen Axiome hat Helmholtz einer eingehenden Erörterung unterworfen in seinem Vortrage „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ (Populäre wissenschaftliche Vorträge von H. Helmholtz, drittes Heft, Braunschweig 1876).

von dem Vorbehalt berührt wird — immer zutreffen. Aber bei wiederholter Anwendung dieses Satzes verliert die Figur ihre ursprüngliche Beschaffenheit. Sind A und B Punkte der ursprünglichen Figur und wird in der Geraden AB ein Punkt C zwischen A und B eingeschaltet, hierauf C_1 zwischen A und C, C_2 zwischen A und C_1 u. s. w., so kann man immer mehr in die Nähe des Punktes A gerathen und muss dann schliesslich auf weitere Einschaltungen verzichten*). Der achte Lehrsatz kann also nicht beliebig oft auf eine Gerade angewendet werden. Eine vollkommen scharfe Grenze lässt sich freilich nicht angeben; man muss sich aber hüten, aus dem Mangel einer scharf angebbaren Grenze das Nichtvorhandensein jeder Grenze zu schliessen.

Die geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze erlernt man an Objecten, von denen man verhältnissmässig nur wenig entfernt ist; über ein solches Gebiet hinaus ist also ihre Anwendung nicht ohne Weiteres berechtigt. Geht man z. B. von einer geraden Strecke AB aus und (VI) verlängert sie über B bis B_1, dann BB_1 über B_1 bis B_2, B_1B_2 über B_2 bis B_3 u. s. f., so kann man wohl eine Zeit lang noch gerade Strecken AB_1, AB_2 u. s. w. einführen, aber früher oder später kommt ein Punkt B_n, von dessen Verbindung mit dem Punkte A durch eine gerade Strecke nicht die Rede sein kann, ohne dass dieser Begriff seinen Charakter als Grundbegriff verliert. Man sagt zwar auch (indem man jede Aufeinanderfolge von geraden Strecken, bei der je zwei benachbarte sich zu einer geraden Strecke vereinigen, wieder eine gerade Strecke nennt), es sei die Strecke AB bis B_1 verlängert, die Strecke AB_1 bis B_2, die Strecke AB_2 bis B_3 u. s. f. Das ändert jedoch nichts an der Art, wie die Punkte $B_1 B_2 \cdots$ wirklich erlangt werden; denn wenn B_n sich von A zu weit entfernt hat, so kann man bei der Herstellung von B_{n+1} nicht mehr A benutzen, wohl aber B_{n-1}. Man wird also auch vom sechsten Grundsatz (oder vom neunten**) Lehrsatz) nicht beliebig oft in einer und derselben Figur Gebrauch machen, wobei wieder eine scharfe Grenze nicht existirt.

Die folgenden Entwickelungen setzen, wie die bisherigen, allemal Figuren voraus***), deren Theile nahe genug bei einander

*) Vergl. die nähere Ausführung in § 23.

**) Auf den achten und neunten stützt sich der zwanzigste.

***) Vergl. Riemann, Gesammelte Werke S. 266; F. Klein, Mathem. Ann. Bd. 4 S. 576 und 624, Bd. 6 S. 134.

sind, um eine directe Beurtheilung ihrer geometrischen Beziehungen zu ermöglichen. **Auf die Verknüpfung solcher Figuren lassen sich alle Anwendungen der Geometrie zurückführen**, ein Gegenstand, der hier nicht näher erörtert werden soll. Wie aber geometrische Begriffe und Gesetze, welche sich innerhalb eines beschränkten Gebietes bewähren, bei fortgesetzter Erweiterung des Gebietes ihre Gültigkeit verlieren können, wird durch eine ganz einfache Betrachtung veranschaulicht. Nehmen wir an, in einer geschlossenen (einfachen) Linie bewege sich ein Beobachter, der immer nur einen kleinen Theil der Linie übersehen und überhaupt nur einen Theil derselben durchlaufen kann, und der in Folge dessen die Linie noch nicht als eine geschlossene erkannt hat. Dieser Beobachter wird innerhalb des jedesmal von ihm überblickten Weges zu Erkenntnissen gelangen, wie sie für die gerade Linie in den Sätzen 6.—11. ausgesprochen sind, und dieselben alsdann auf das ihm zugängliche Gebiet ausdehnen; er wird schliesslich geneigt sein, sie auf die Linie in ihrer ganzen Erstreckung zu übertragen, wenn er dies aber thut, natürlich zu unrichtigen Schlüssen gelangen. Es seien z. B. A, B Punkte von geringem gegenseitigen Abstande, und der Punkt M werde durch Fortsetzung des Weges AB über B hinaus erreichbar vorausgesetzt; sagt man alsdann, es sei B zwischen A und M gelegen, und schliesst weiter, es sei A nicht zwischen B und M gelegen, so leugnet man damit die thatsächlich vorhandene Möglichkeit, den Punkt M durch Fortsetzung des Weges BA über A hinaus zu erreichen.

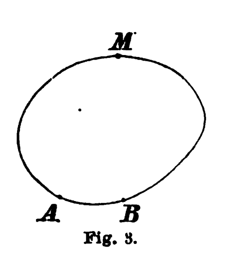


Fig. 3.

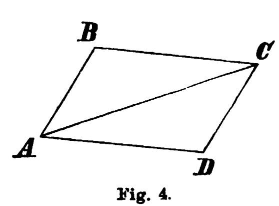


Fig. 4.

Diese Bemerkung ist u. A. zu berücksichtigen bei der Frage, ob die Geraden AB und CD einen Punkt gemein haben können, wenn die Figuren ABC und CDA (nicht ADC) congruent sind (§ 13) und die Punkte B, D auf verschiedenen Seiten der Geraden AC liegen. Die Figuren $ABCD$ und $CDAB$ sind congruent, und die geraden Strecken AB, CD haben keinen Punkt gemein. Man pflegt nun zu schliessen: Hätten die Geraden AB und CD den Punkt M gemein, so wären die Figuren $ABCDM$ und $CDABM$ congruent, und M läge ausserhalb der Strecke AB; läge etwa B zwischen A und M, so läge auch D zwischen C und M, D und M auf derselben Seite der Geraden BC, ebenso A und M, d. h. A zwischen B und M, was nicht

möglich ist. Hierdurch wird jedoch die Frage nicht entschieden, da auf die Figur $ABCDM$ manche geometrische Begriffe und Sätze in der Art, wie es vorhin geschehen, möglicherweise nicht angewendet werden dürfen.

§ 2. Von den Ebenen.

Wir ziehen jetzt einen weiteren geometrischen Begriff in die Betrachtung, die Ebene. Aehnlich wie bei der geraden Linie auseinandergesetzt wurde, wird von der Ebene gesagt, dass sie unbegrenzt sei; wenn wir uns aber an die unmittelbare Wahrnehmung halten, so lernen wir nur die wohlbegrenzte ebene Fläche kennen. Demgemäss wird zunächst nur von der ebenen Fläche und von Punkten einer ebenen Fläche die Rede sein, der Begriff „Ebene" aber erst nachher eingeführt werden.

Die folgenden Sätze sind wieder zum Theil Grundsätze, zum Theil Lehrsätze. Beim Beweise der letzteren dürfen wir von den in § 1 gegebenen Sätzen Gebrauch machen. Die ersteren sind der Ausdruck gewisser Beobachtungen, welche an ebenen Figuren leicht gemacht werden können.

Durch drei beliebige Punkte A, B, C kann man eine ebene Fläche legen, wenn auch nicht gerade eine einzige. Zieht man nun eine gerade Strecke durch A und B, so brauchen nicht alle Punkte der Strecke in jener Fläche zu liegen, aber man kann nöthigenfalls die letztere zu einer ebenen Fläche erweitern, welche die Strecke, d. h. alle ihre Punkte, enthält.

I. Grundsatz. — Durch drei beliebige Punkte kann man eine ebene Fläche legen.

II. Grundsatz. — Wird durch zwei Punkte einer ebenen Fläche eine gerade Strecke gezogen, so existirt eine ebene Fläche, welche alle Punkte der vorigen und auch die Strecke enthält.

Wenn *zwei* ebene Flächen gegeben sind, so kann ein Punkt A in beiden zugleich enthalten sein. Wir nehmen dann allemal wahr, dass der Punkt A nicht der einzige gemeinschaftliche Punkt ist, wenn wir nöthigenfalls die beiden Flächen oder eine von ihnen gehörig erweitert haben.

III. Grundsatz. — Wenn zwei ebene Flächen P, P' einen Punkt gemein haben, so kann man einen andern Punkt angeben, der sowohl mit allen Punkten von E, als auch mit allen Punkten von E' je in einer ebenen Fläche enthalten ist.

Es können zwei ebene Flächen auch *drei* Punkte zugleich ent-

halten. Bei der Untersuchung dieses Falles kann man eine Beobachtung benutzen, welche auch zur Beantwortung anderer, auf die Begegnung von Linien bezüglicher Fragen erforderlich ist. In einer ebenen Fläche seien drei Punkte A, B, C zu einem Dreieck zusammengefügt, d. h. durch die geraden Strecken AB, AC, BC paarweise verbunden. In derselben Fläche sei die gerade Strecke DE gelegen und zwar so, dass sie einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt F enthält. Die Strecke DE hat dann allemal entweder mit der Strecke AC oder mit der Strecke BC einen Punkt gemein, oder sie kann bis zu einem solchen Punkte verlängert werden.

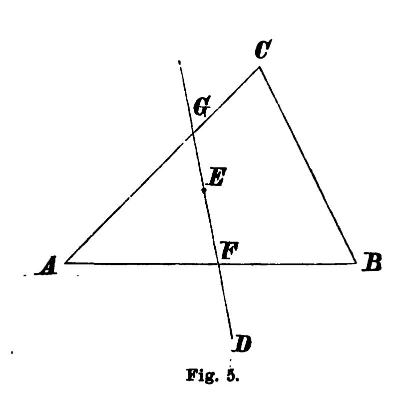


Fig. 5.

IV. Grundsatz. — Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, AC, BC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Oder: Liegen die Punkte A, B, C, D in einer ebenen Fläche, F in der Geraden AB zwischen A und B, so geht die Gerade DF entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

1. Lehrsatz. — Liegen die Punkte A, B, C, D in einer ebenen Fläche P, zugleich die Punkte A, B, C in einer ebenen Fläche P', aber nicht in einer geraden Linie, so existirt eine ebene Fläche, welche alle Punkte von P' enthält und auch den Punkt D.

Beweis. — Liegt D in einer der Geraden AB, AC, BC, so existirt eine solche Fläche nach dem zweiten Grundsatz. Liegt D in keiner der Geraden AB, AC, BC, so werde in der Geraden AB zwischen A und B ein Punkt F angenommen; es mag dann (IV) die Gerade DF etwa durch einen Punkt G der Strecke AC gehen; F und G sind von einander verschieden, D in der Geraden FG. Es existirt jetzt eine ebene Fläche Q, welche alle Punkte von P' enthält und auch F; weiter eine ebene Fläche Q', welche alle Punkte von Q enthält und auch G; schliesslich eine ebene Fläche welche alle Punkte von Q' enthält und auch D.

Gehen wir nun von drei beliebigen, nicht in eine Gerade gehörigen Punkten A, B, C aus und legen durch sie eine ebene Fläche. Wenn durch die Punkte A, B, C und einen weiteren Punkt D sich ebenfalls eine ebene Fläche legen lässt, so braucht D zwar der vorigen nicht anzugehören; diese lässt sich aber nöthigenfalls erweitern, bis sie auch den Punkt D enthält (1). In Folge dessen sagt man: der Punkt D liegt in der Ebene der Punkte A, B, C, oder einfach: in der Ebene ABC, oder: die Ebene ABC geht durch D, D ist ein Punkt der Ebene ABC u. s. w.

Es seien L, M, N drei beliebige Punkte. Wenn sie nicht in gerader Linie liegen, so sei A ein Punkt der Geraden LM, B ein Punkt der Geraden LN, C ein Punkt der Geraden MN; ich kann dann durch L, M, N eine ebene Fläche legen, folglich auch durch L, M, N, A, B, C. Wenn L, M, N in einer Geraden liegen, so sei A ein Punkt ausserhalb der Geraden, B ein Punkt der Geraden AL, C ein Punkt der Geraden AM; durch A, L, M kann man eine ebene Fläche legen, folglich auch durch A, B, C, L, M, N. Beidemal liegen A, B, C nicht in gerader Linie und L, M, N in der Ebene ABC.

2. Lehrsatz. — Durch drei Punkte kann man immer eine Ebene legen.

Es sei A' ein Punkt der Ebene ABC und A', B, C nicht in gerader Linie (also A ein Punkt der Ebene $A'BC$). Wird nun D von A verschieden in der Ebene $A'BC$ angenommen, so liegen die Punkte A, B, C, D, A' in einer ebenen Fläche, d. h. D zugleich in der Ebene ABC; und wenn wir auch die Punkte A, B, C „Punkte der Ebene ABC“ nennen, so können wir sagen, dass jeder Punkt der Ebene $A'BC$ zugleich der Ebene ABC angehört. Aber auch umgekehrt sind alle Punkte der Ebene ABC Punkte der Ebene $A'BC$. Man sagt daher: Die Ebenen ABC und $A'BC$ fallen mit einander zusammen.

Jetzt seien A', B', C' beliebige Punkte der Ebene ABC, aber nicht in einer Geraden. Der Punkt A' kann in einer der Geraden AB, AC, BC liegen, doch höchstens in zweien; er liege ausserhalb der Geraden BC; dann fallen die Ebenen ABC und $A'BC$ zusammen. Der Punkt B' liegt in der Ebene $A'BC$, doch nicht in den Geraden $A'B$, $A'C$ zugleich; er liege ausserhalb der Geraden $A'C$; dann fallen die Ebenen $A'BC$ und $A'B'C$ zusammen. Der Punkt C' liegt in der Ebene $A'B'C$, aber nicht in der Geraden $A'B'$; folglich sind die Ebenen $A'B'C$ und $A'B'C'$ identisch.

3. Lehrsatz. — Jede Ebene ist durch drei beliebige von ihren Punkten, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmt.

Oder: Drei Punkte, welche zugleich verschiedenen Ebenen angehören, liegen in einer Geraden.

Häufig wird zur Bezeichnung einer Ebene ein besonderer Buchstabe benutzt. Sind A, B, C Punkte der Ebene P, welche nicht in gerader Linie liegen, so bedeutet P die Ebene ABC. —

Nehmen wir jetzt in einer Geraden g die Punkte A, B beliebig, ebenso in einer durch A und B gehenden Ebene P den Punkt C ausserhalb der Geraden g. Ist D irgend ein dritter Punkt der Geraden g, so kann man durch die Punkte A, B, C eine ebene Fläche legen, weiter auch durch die Punkte A, B, C, D; der Punkt D liegt also in der Ebene ABC, d. i. in der Ebene P. Da dies von allen Punkten der Geraden g gilt, so sagt man: g liegt in der Ebene P, g ist eine Gerade der Ebene P, u. s. w.

4. Lehrsatz. — Eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr. Oder: Alle Ebenen, welche zwei Punkte gemein haben, enthalten die Gerade der beiden Punkte.

Wenn die Gerade g in einer Ebene P nicht ganz enthalten ist, so kann sie mit ihr nicht mehr als einen Punkt gemein haben. Besitzen g und P einen gemeinschaftlichen Punkt A, aber nur einen, so sagt man, sie schneiden sich in A; A wird der Durchschnittspunkt von g und P genannt und mit gP oder Pg bezeichnet.

Bei der Bestimmung einer Ebene kann eine Gerade benutzt werden. Ist eine Gerade g und ein Punkt C gegeben, so nehme man die Punkte A und B in der Geraden g beliebig (von C verschieden); durch A, B, C kann ich eine Ebene legen, und diese enthält g.

5. Lehrsatz. — Durch eine Gerade und einen Punkt kann man immer eine Ebene legen.

Ist nun P eine Ebene, welche die Gerade g und den Punkt C, folglich A, B, C enthält, so geht keine andere Ebene durch g und C, wenn C ausserhalb der Geraden AB liegt; die Ebene P ist alsdann durch g und C bestimmt und kann mit gC oder Cg bezeichnet werden.

6. Lehrsatz. — Jede Ebene ist durch eine beliebige ihr angehörige Gerade im Verein mit einem beliebigen ihr angehörigen Punkte, welcher nicht in der Geraden liegt, bestimmt. Oder: Zwei Ebenen, welche eine Gerade gemein haben, haben ausserdem keinen Punkt gemein. Oder: Wenn ein Punkt und eine Gerade sich in zwei Ebenen vorfinden, so geht die Gerade durch den Punkt.

Zwei Geraden g, h sind stets in einer Ebene enthalten, wenn sie sich schneiden. Ist in der That ein Schnittpunkt gh vorhanden, so nehme ich in der Geraden h den Punkt C beliebig (von

gh verschieden); die Ebene gC geht alsdann durch die Punkte C und gh, mithin durch die Gerade h.

7. Lehrsatz. — Durch zwei Geraden, welche einen Punkt gemein haben, kann man immer eine Ebene legen. Oder: Zwei Geraden, welche nicht in einer Ebene liegen, haben keinen Punkt gemein.

Ueberhaupt seien g und h Geraden einer Ebene P. Nimmt man den Punkt C in h beliebig (ausserhalb g), so ist P die Ebene gC, und es kann eine andere Ebene durch g und h zugleich nicht gehen. Die Ebene der Geraden g und h kann mit gh bezeichnet werden; man darf jedoch nicht vergessen, dass im Falle einer Begegnung der Geraden g und h für den Durchschnittspunkt dieselbe Bezeichnung gilt.

8. Lehrsatz. — Jede Ebene ist durch zwei beliebige von ihren Geraden bestimmt.

Betrachten wir jetzt zwei Ebenen P und Q, welche einen gemeinschaftlichen Punkt A besitzen. Man nehme in der Ebene P die Punkte B und C, in der Ebene Q die Punkte D und E beliebig, aber weder A, B, C noch A, D, E in einer Geraden. Nach dem dritten Grundsatze existirt ein Punkt F derart, dass sowohl die Punkte A, B, C, F als auch die Punkte A, D, E, F ebene Figuren bilden. Es liegt also der Punkt F sowohl in der Ebene ABC als auch in der Ebene ADE, d. h. in den Ebenen P und Q. Diese Ebenen haben somit die Gerade AF gemein.

9. Lehrsatz. — Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein.

Die Gerade enthält alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden Ebenen; sie wird die Durchschnittslinie, ihre Punkte werden Durchschnittspunkte der Ebenen genannt. Die Durchschnittslinie der Ebenen P und Q wird mit PQ bezeichnet.

Drei Ebenen P, Q, R können einen Punkt A gemein haben. Wenn A nicht der einzige gemeinschaftliche Punkt ist, so haben die drei Ebenen eine Gerade gemein. Wenn die Ebenen P, Q, R sich nur im Punkte A begegnen, so wird A ihr Durchschnittspunkt genannt und mit PQR bezeichnet; sie haben dann zu je zweien eine Gerade gemein; die Durchschnittslinien sind von einander verschieden, treffen sich jedoch im Punkte A.

Es seien überhaupt P, Q, R drei Ebenen, welche sich paarweise durchschneiden. Haben von den Durchschnittslinien irgend zwei, etwa PQ und PR, einen Punkt A gemein, so schneiden die drei Ebenen sich in A. Wenn die Durchschnittslinie zwe
nen die dritte Ebene schneidet, so ist der Durchschnit

falls den drei Ebenen gemein. Wenn zwei Durchschnittslinien zusammenfallen, so sind sie von der dritten nicht verschieden.

Eine beliebige Gruppe von Punkten oder von Geraden oder von Punkten und Geraden in einer Ebene heisst eine ebene Figur. Man kann eine ebene Figur erweitern theils durch Hinzunehmen beliebiger anderer Punkte und Geraden derselben Ebene, theils durch Construction, d. h. hier: durch Verbinden von Punkten der Figur und durch Aufsuchen der Durchschnittspunkte in ihren Geraden. Solche Constructionen führen aus der Ebene nicht heraus.

Um in zwei Geraden einen Schnittpunkt nachzuweisen, wird oft der folgende Lehrsatz angewendet werden, der sich aus dem vierten Grundsatze sofort ergiebt.

10. Lehrsatz. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, D ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B, g eine Gerade in der Ebene ABC, welche durch D, aber durch keinen der Punkte A, B, C hindurchgeht, so begegnet g entweder der Geraden AC zwischen A und C oder der Geraden BC zwischen B und C.

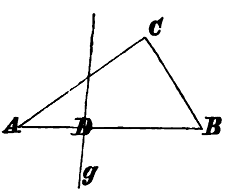


Fig. 6.

Wir werden uns künftig weder auf die Grundsätze noch auf den ersten Lehrsatz dieses Paragraphen berufen. Von den neun übrigen Lehrsätzen sind 5.–8. Folgerungen aus 2.–4. Bezüglich des zehnten ist derselbe Vorbehalt zu machen, wie bezüglich des achten Lehrsatzes in § 1.

Noch mögen hier einige Folgerungen Platz finden, die sich an den 10. Lehrsatz anschliessen.

11. Lehrsatz. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, a ein Punkt der Geraden BC zwischen B und C, b ein Punkt der Geraden AC zwischen A und C, c ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B, so liegen die Punkte a, b, c nicht in gerader Linie.

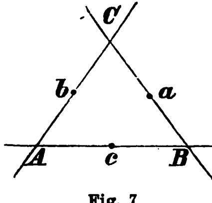


Fig. 7.

Beweis. — Der Punkt a liegt nicht innerhalb der Strecke bc, da sonst (10) die Gerade BC entweder der Geraden Ab zwischen A und b oder der Geraden Ac zwischen A und c begegnen müsste. Ebensowenig liegt b innerhalb der Strecke ac [illegible] c innerhalb der Strecke ab.

[illegible]rsatz. — Liegen vier Punkte A, B, C, D in einer [illegible] entweder die Geraden AD und BC, oder

BD und AC, oder CD und AB (mindestens) einen Punkt gemein.

Beweis. — Befinden sich unter den gegebenen Punkten drei in gerader Linie, so treten mindestens drei solche Durchschnittspunkte gleichzeitig auf. Liegen keine drei in gerader Linie, verlaufen also die Geraden AD, BD, CD in ihrer Ebene getrennt, so braucht nur gezeigt zu werden, dass die Geraden CD und AB sich schneiden, wenn weder die Gerade AD mit der Strecke BC, noch die Gerade BD mit der Strecke AC einen Punkt gemein hat. Verlängert man nun unter dieser Voraussetzung die Strecke AD über D hinaus bis A', so wird (10) die Gerade AC von BD zwischen A' und C in einem Punkte M getroffen, und zwar liegt D nicht zwischen B und M, da sonst (10) die Gerade AD entweder der Geraden CM zwischen C und M oder der Geraden BC zwischen B und C begegnen müsste. Da also die Gerade CD weder mit der Strecke $A'M$ noch mit der Strecke BM einen Punkt gemein hat, so hat sie auch mit der Strecke $A'M$ keinen Punkt gemein (10), mithin begegnet sie (10) der Geraden AB zwischen A und B.

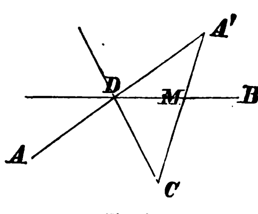


Fig. 8.

§ 3. Vom Strahlenbüschel.

Wenn in einer Geraden m drei Punkte A, B, C angenommen werden, so muss einer zwischen den beiden andern liegen. Wie schon in § 1 erwähnt worden ist, sagt man: die Punkte A und B liegen auf derselben Seite von C, wenn C nicht zwischen ihnen liegt; dagegen sagt man: die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten von C, wenn C sich zwischen A und B befindet.

In der Geraden m fixire ich einen Punkt S. Wenn A, B, C drei (von S verschiedene) Punkte der Geraden m sind, so kann ich aus dem Verhalten zweier Paare in folgender Weise auf das des dritten Paares schliessen. *Liegen A und B auf derselben, A und C auf verschiedenen Seiten von S, so liegen B und C auf verschiedenen Seiten.* Entweder liegt nämlich A zwischen B und S, S zwischen A und C, folglich S zwischen B und C nach § 1, 16; oder S liegt zwischen A und C, B zwischen A und S, folglich S zwischen B und C nach § 1, 13. *Liegen A und B, ebenso A und C auf derselben Seite von S, so liegen auch B und C auf derselben Seite.* Denn sonst lägen A und B auf derselben Seite, B und C auf verschiedenen, folglich auch A und C auf verschiedenen. *Lie-*

gen A und B, ebenso A und C auf verschiedenen Seiten von S, so liegen B und C auf derselben Seite. Denn dann werden AS durch BC nicht getrennt, folglich entweder AB durch CS oder AC durch BS; es liegt also entweder B zwischen C und S oder C zwischen B und S.

Wenn A und B in der Geraden m auf derselben Seite von S liegen, so kann man sagen: B liegt im Schenkel SA (nicht AS). Ist A' ein beliebiger Punkt des Schenkels SA, und nennen wir auch A einen „Punkt des Schenkels SA", so ist jeder Punkt des Schenkels SA ein Punkt des Schenkels SA', und umgekehrt; bei der Bezeichnung des Schenkels SA kann man A durch jeden Punkt des Schenkels ersetzen. Liegen A und C in der Geraden m auf verschiedenen Seiten von S, so gehört jeder (von S verschiedene) Punkt der Geraden zum Schenkel SA, wenn er nicht zum entgegengesetzten Schenkel SC gehört.

Durch die Gerade m lege ich jetzt eine Ebene P und nehme in ihr zwei Punkte A, B ausserhalb der Geraden m. Wenn m die Gerade AB zwischen A und B nicht trifft, so sagt man: die Punkte A und B liegen auf derselben Seite von m; wenn m die Gerade AB zwischen A und B trifft, so sagt man: die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten von m, oder: m geht zwischen A und B hindurch. Wenn A, B, C Punkte der Ebene P (ausserhalb m) sind, so gelten die Sätze: *Liegen A und B auf derselben, A und C auf verschiedenen Seiten von m, so liegen B und C auf verschiedenen Seiten* (§ 2, 10). *Liegen A und B, ebenso A und C auf derselben Seite von m, so liegen auch B und C auf derselben Seite. Liegen A und B, ebenso A und C auf verschiedenen Seiten von m, so liegen B und C auf derselben Seite* (§ 2, 11). Nimmt man in m wieder einen Punkt S, so liegen alle Punkte des Schenkels SA auf derselben Seite von m, und man kann daher die vorstehend angegebenen Ausdrucksweisen und Sätze auf solche Schenkel übertragen. —

Gerade Linien, welche durch einen Punkt laufen, werden mit den Lichtstrahlen, welche ein leuchtender Punkt aussendet, verglichen und in Folge dessen ein Strahlenbündel genannt. Gehen also die Geraden e, f, g durch einen Punkt S, so nennt man sie Strahlen eines Bündels, oder man sagt: der Strahl g liegt im Bündel der beiden Strahlen e und f, g liegt im Bündel ef, g ist ein Strahl des Bündels ef; auch e und f selbst werden „Strahlen des Bündels ef" genannt. Zur Bezeichnung des Bündels (im letzteren Sinne) dienen zwei beliebige von seinen Strahlen; man kann aber auch einen besonderen Buchstaben zur Bezeichnung des Bün-

dels anwenden, und zwar wird alsdann der für den Punkt ef eingeführte (hier S) benutzt. Dieser Punkt heisst der Scheitel oder Mittelpunkt des Bündels.

Auch ohne Beziehung auf ein Bündel wird häufig das Wort „Strahl" für „Gerade" gebraucht.

Gerade Linien, welche in einer Ebene enthalten sind und durch einen Punkt hindurchgehen, werden ein (ebenes) Strahlenbüschel genannt; der gemeinschaftliche Punkt heisst der Scheitel oder Mittelpunkt des Büschels. Gehen in einer Ebene die Strahlen e, f, g durch einen Punkt S, so sagt man: der Strahl g liegt im Büschel ef u. s. w. Man darf zur Bezeichnung des Büschels im letzteren Sinne zwei beliebige in ihm gelegene Strahlen benutzen, den einen Buchstaben S aber nur dann, wenn die Ebene des Büchels anderweitig gegeben ist.

Es seien nun e, f, g Strahlen eines Büschels S in der Ebene P, ferner SA und SB Schenkel resp. von e und f, und zwar auf verschiedenen Seiten der Geraden g. Ist der Durchschnittspunkt M der Strecke AB mit dem Strahl g im Schenkel SC des letzteren enthalten (also BCM auf derselben Seite von e), so behält der Schenkel SC diese Eigenschaft, wenn man A im Schenkel SA, B im Schenkel SB beliebig verlegt, und man sagt: der Schenkel SC liegt zwischen den Schenkeln SA und SB.

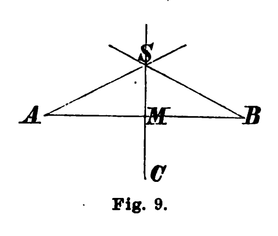


Fig. 9.

Wir begegnen hier einer vollkommenen Analogie mit dem in den Sätzen 7.—11. des ersten Paragraphen dargestellten Verhalten der Punkte einer Geraden. Wenn nämlich SA, SB, SC, SD Schenkel auf verschiedenen Strahlen eines Büschels bedeuten, so gelten die Sätze: *Liegt SC zwischen SA und SB, so liegt weder SA zwischen SB und SC, noch SB zwischen SA und SC. Sind SA und SB gegeben, so kann man SC so wählen, dass SC zwischen SA und SB liegt. Sind SA und SB gegeben, so kann man SC so wählen, dass SA zwischen SB und SC liegt. Liegt SC zwischen SA und SB, SD zwischen SA und SC, so liegt SD auch zwischen SA und SB. Liegen SC und SD zwischen SA und SB, aber SD nicht zwischen SA und SC, so liegt SD zwischen SB und SC.* Aber zu Satz 6. des ersten Paragraphen fehlt der analoge. Sollen die in einer Ebene angenommenen Schenkel SA, SB, SC, ... in jeder Hinsicht analoge Eigenschaften besitzen, wie die Punkte einer Geraden, so wird unter Anderem, dem Satze § 1, 18. entsprechend, dadurch die Existenz zweier Schenkel SM und

SN in derselben Ebene bedingt, zwischen denen die vorigen eingeschlossen werden. Wenn nun diese existiren, so liegen die Punkte A und N auf derselben Seite der Geraden SM, ebenso B und N, C und N u. s. w. Folglich liegen alsdann die Schenkel SA, SB, SC, ... auf derselben Seite eines zum Büschel S gehörigen Strahls.

Nehmen wir also in einer Ebene die Geraden $e, f, g, \ldots$ durch einen Punkt S, überdies in demselben Büschel eine weitere Gerade k, und die Schenkel SA, SB, SC, ... resp. von $e, f, g, \ldots$ auf derselben Seite von k. Dann haben diese Schenkel allemal die Eigenschaft, dass *von je dreien einer zwischen den beiden andern liegt;* denn hat weder e mit der Strecke BC, noch f mit der Strecke AC einen Punkt gemein, so begegnet g der Geraden AB zwischen A und B (vergl. den Beweis des Satzes § 2, 12), und der Schnittpunkt liegt mit A und B auf derselben Seite von k, d. h. im Schenkel SC. Die entgegengesetzten Schenkel zu SA, SB, SC seien resp. SA', SB', SC'. Lag nun der Schenkel SC zwischen SA und SB, so wird auch SC' zwischen SA' und SB' liegen;

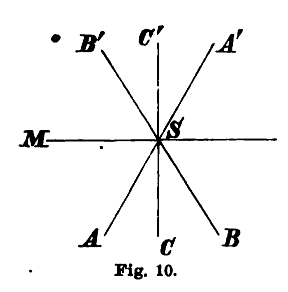


Fig. 10.

denn A' und B' liegen auf verschiedenen Seiten von g, und der Schnittpunkt der Geraden g mit der Strecke $A'B'$ liegt mit A' und B' auf derselben Seite von k. Wir wollen deshalb, ohne die Schenkel zu unterscheiden, sagen: Der Strahl g liegt zwischen den Strahlen e und f (oder f und e) bei ausgeschlossenem k, oder: für den Grenzstrahl k. Nehme ich nun in k den Punkt M mit A und B' auf derselben Seite von g, so liegt der Schenkel SM zwischen SA und SB', d. h. es liegt auch der Strahl k zwischen e und f bei ausgeschlossenem g. Man sagt: e und f werden durch g und k (oder k und g) getrennt.

Das Strahlenbüschel zeigt hiernach nicht mit einer begrenzten, sondern mit einer geschlossenen Linie analoges Verhalten. Für die Schenkel SA, SB, ... gelten die in § 1 ausgesprochenen Beziehungen zwischen Punkten einer Geraden ohne Ausnahme; in diese Beziehungen kann ich aber jetzt die Strahlen statt der Schenkel einführen, wenn ich überall den Zusatz „für den Grenzstrahl k" anbringe, und erhalte somit zwischen den Strahlen eines Büschels genau dieselben Relationen, welche für die Punkte einer geschlossenen Linie in den Sätzen a bis l des § 1 ausgesprochen wurden. Es genügt diejenigen Relationen anzugeben, welche den Sätzen 19.—23. des § 1 entsprechen.

Liegen die Strahlen e, f, g, k in einem Büschel, so werden ent-

weder fg *durch* ek *getrennt, oder* ge *durch* fk, *oder* ef *durch* gk, *und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden andern aus.*

Liegen die Strahlen e, f, k *in einem Büschel, so kann man in ihm den Strahl* g *so wählen, dass* ef *durch* gk *getrennt werden.*

Sind in einem Strahlenbüschel die Strahlen ef *durch eines der Paare* gk *und* hk *getrennt, durch das andere aber nicht, so sind* ef *durch* gh *getrennt. In den anderen Fällen werden* ef *durch* gh *nicht getrennt.*

Werden in einem Strahlenbüschel die Strahlen ef *durch* gk *getrennt, so werden auch* gk *durch* ef *getrennt.*

§ 4. Vom Ebenenbüschel.

Wenn die Punkte A und B ausserhalb der Ebene P liegen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: die Ebene P schneidet entweder die Gerade AB zwischen A und B, oder nicht. Im ersten Falle sagt man: die Ebene P geht zwischen A und B hindurch, oder: die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene P; im zweiten Falle sagt man: die Punkte A und B liegen auf derselben Seite der Ebene P. Für drei Punkte A, B, C ausserhalb der Ebene P gelten folgende drei Sätze.

Liegen A *und* B *auf derselben,* A *und* C *auf verschiedenen Seiten der Ebene* P, *so liegen* B *und* C *auf verschiedenen Seiten.* Sind nämlich A, B, C in einer Geraden g gelegen, so trifft P die Gerade g zwischen A und C, aber nicht zwischen A und B; folglich geht P zwischen B und C hindurch. Sind dagegen die drei Punkte A, B, C zur Bestimmung einer Ebene ABC geeignet, so haben die Ebenen P und ABC einen in der Geraden AC zwischen A und C gelegenen Punkt gemein, mithin eine Gerade m; diese geht zwischen A und C hindurch, nicht aber zwischen A und B; folglich geht m zwischen B und C hindurch.

Daraus folgt ohne Weiteres: *Liegen* A *und* B, *ebenso* A *und* C *auf derselben Seite der Ebene* P, *so liegen auch* B *und* C *auf derselben Seite.*

Liegen A *und* B, *ebenso* A *und* C *auf verschiedenen Seiten der Ebene* P, *so liegen* B *und* C *auf derselben Seite.* — Beweis: Wenn A, B, C in einer Geraden g liegen, so wird g von der Ebene P zwischen A und B getroffen, zugleich auch zwischen A und C, also nicht zwischen B und C. Wird dagegen durch A, B, C eine Ebene bestimmt, so haben die Ebenen P und ABC einen zwischen A und B gelegenen Punkt der Geraden AB und einen zwischen A und C gelegenen Punkt der Geraden AC gemein, folglich eine

Gerade, welche zwischen A und B und zwischen A und C hindurchgeht; diese Gerade geht nicht zwischen B und C hindurch.

Wenn G eine Gerade, A einen Punkt ausserhalb derselben bedeutet, und man nimmt in der Ebene AG einen Punkt a mit A auf derselben Seite von G, so kann man sagen: a liegt im Schenkel GA; man nennt auch A einen „Punkt des Schenkels GA" und darf A bei der Bezeichnung des Schenkels durch jeden Punkt desselben ersetzen. Liegt die Gerade G in der Ebene P, so liegen alle Punkte des Schenkels GA auf derselben Seite von P. —

Ebenen, welche durch einen Punkt s hindurchgehen, werden ein Ebenenbündel genannt; der Punkt s heisst der Scheitel oder Mittelpunkt des Bündels. Gehen die Ebenen P, Q, R, S durch den Punkt s, so kann man sagen: die Ebene S liegt im Bündel PQR, wenn die Ebenen P, Q, R nur einen Punkt gemein haben; auch P, Q, R werden „Ebenen des Bündels PQR" genannt. Zur Bezeichnung des Bündels dienen irgend drei ihm angehörige Ebenen, welche nur einen Punkt gemein haben; man kann aber das Bündel PQR auch durch den für den Scheitel eingeführten Buchstaben bezeichnen.

Ebenen, welche (mehr als einen Punkt, mithin) eine Gerade G gemein haben, werden ein Ebenenbüschel genannt; die Gerade G heisst die Axe des Büschels. Gehen die Ebenen P, Q, R durch die Gerade G, so sagt man: Die Ebene R liegt im Büschel PQ, im Büschel G, u. s. w.

Sind P, Q, R Ebenen eines Büschels G, ferner GA und GB Schenkel resp. von P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene R, ist endlich GC der Schenkel von R, welcher den Schnittpunkt der Strecke AB mit R enthält, so sagt man: Der Schenkel GC liegt *zwischen* den Schenkeln GA und GB.

Die Schenkel GA, GB, GC, ... auf den Ebenen des Büschels können ebenso untersucht werden, wie im Strahlenbüschel die vom Scheitel ausgehenden Schenkel. Werden die Punkte A, B, C beliebig angenommen, so ist es nicht nöthig, dass von den drei Schenkeln GA, GB, GC einer zwischen den beiden andern liegt; davon abgesehen gelten dieselben Beziehungen, wie für Punkte in einer Geraden. Um auch die eine Ausnahme zu beseitigen, ist es nothwendig und hinreichend, nur Schenkel auf derselben Seite einer durch G gelegten Ebene zu betrachten. Es seien im Büschel G die Ebenen P, Q, R, T gelegen; GA, GB, GC seien Schenkel resp. von P, Q, R auf derselben Seite von T; die entgegengesetzten Schenkel seien GA', GB', GC'. Liegt alsdann der Schenkel GC zwischen den Schenkeln GA und GB, so wird auch GC' zwischen

GA' und GB' liegen; wir sagen: Die Ebene R liegt zwischen den Ebenen P und Q (Q und P) bei ausgeschlossener T, oder: für die Grenzebene T, und finden, dass auch T zwischen P und Q liegt für die Grenzebene R. Man sagt, P und Q werden durch R und T (oder T und R) getrennt, und kann die folgenden Sätze aufstellen:

Liegen die Ebenen P, Q, R, T in einem Büschel, so werden entweder QR durch PT getrennt, oder RP durch QT, oder PQ durch RT, und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden andern aus.

Liegen die Ebenen P, Q, T in einem Büschel, so kann man in ihm die Ebene R so wählen, dass PQ durch RT getrennt werden.

Sind in einem Ebenenbüschel die Ebenen PQ durch eines der Paare RT und ST getrennt, durch das andere aber nicht, so werden PQ durch RS getrennt. In den andern Fällen werden PQ durch RS nicht getrennt.

Werden in einem Ebenenbüschel die Ebenen PQ durch RT getrennt, so werden auch RT durch PQ getrennt. —

Die Eigenschaften des Strahlenbüschels und des Ebenenbüschels hängen mit einander innig zusammen.

Es seien e und f Strahlen in derselben Ebene U und durch den Punkt M, ferner P und Q Ebenen resp. durch e und f (von U verschieden), endlich G die Durchschnittslinie der Ebenen P und Q. Dann kann man das Strahlenbüschel ef und das Ebenenbüschel PQ auf einander beziehen, indem man jedem Strahl des ersteren die ihn enthaltende Ebene des letzteren zuordnet, und ist dadurch im Stande, Eigenschaften von Strahlen des Büschels ef auf die zugeordneten Ebenen des Büschels G und umgekehrt zu übertragen. Wählt man in e den Punkt A beliebig, so sind alle Punkte des Schenkels MA im Schenkel GA der zugeordneten Ebene P enthalten; man kann dem Schenkel MA des Strahls e den Schenkel GA der Ebene P zuordnen. Wenn in der Ebene U der Schenkel MC zwischen MA und MB liegt, so liegt auch der Schenkel GC zwischen GA und GB, und umgekehrt. Der Strahl MC werde mit g, die Ebene GC mit R bezeichnet; überdies werde im Büschel ef ein vierter Strahl k, im Büschel PQ die zngeordnete Ebene T angenommen. Liegen alsdann die Schenkel MA, MB, MC auf derselben Seite von k, so liegen die Schenkel GA, GB, GC auf derselben Seite von T, und umgekehrt.

Liegen die Schenkel MA, MB, MC auf derselben Seite von k und zwar der Schenkel MC zwischen den beiden andern, d. h. *werden die Strahlen ef durch gk getrennt, so werden die Ebenen PQ durch RT getrennt.* Auch hiervon ist die Umkehrung richtig.

§ 5. Vom Strahlenbündel.

Zwei Geraden l, m in einer Ebene bestimmen, sobald sie einen Punkt gemein haben, ein Strahlenbündel lm. Nimmt man einen Punkt A ausserhalb der Ebene lm, so entsteht die Forderung, A mit dem Scheitel des Bündels lm durch eine Gerade zu verbinden, d. h. durch A den Strahl des Bündels lm zu legen. Diese Forderung kann ohne Benutzung des Scheitels erfüllt werden; die Ebenen Al und Am haben nämlich eine Gerade λ gemein, und λ ist der durch A gehende Strahl des Bündels lm.

Wenn die Geraden l und m in einer Ebene verlaufen, so ist diese Construction immer ausführbar, gleichviel ob die Existenz eines Durchschnittspunktes von l und m bekannt ist oder nicht. Wird aber noch ein Punkt B ausserhalb der Ebenen lm, Al und Am angenommen und die Durchschnittslinie der Ebenen Bl und Bm mit μ bezeichnet, so werden Ebenen λB und μA bestimmt; wenn l und m sich in S schneiden, so fallen die Ebenen λB und μA mit der Ebene ABC zusammen, d. h. die Strahlen λ und μ in eine Ebene; man kann nun zeigen, dass λ und μ auch dann in einer Ebene liegen, wenn an den Geraden l und m keine Durchschneidung nachweisbar ist.

Wir haben zunächst in einer Ebene die Geraden l und m. Auf l wählen wir die Punkte A und B beliebig und nehmen an, dass m durch keinen Punkt der Strecke AB hindurchgeht; wählt man dann in der Ebene lm den Punkt C, ausserhalb l und m, nicht mit A und B auf derselben Seite von m, so wird die Gerade AC zwischen A und C, etwa in D, und die Gerade BC zwischen B und C, etwa in E, von m getroffen. Es liegen C und D auf derselben Seite der Geraden AE, aber B und C auf verschiedenen, folglich B und D auf verschiedenen, d. h. die Geraden AE und BD begegnen sich in einem Punkte F zwischen B und D, der zugleich zwischen A und E liegen muss. Da A und D auf derselben Seite der Geraden CF liegen, B und D auf verschiedenen, folglich A und B auf ver-

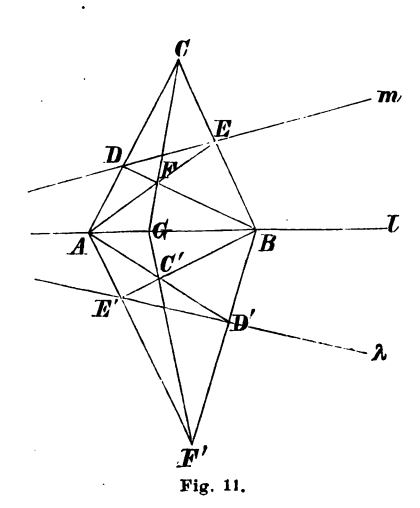


Fig. 11.

schiedenen, so begegnen sich die Geraden l und CF in einem Punkte G.

Auch l und λ sollen in einer Ebene liegen, aber nicht $lm\lambda$ in derselben Ebene. Ich nehme an, dass auch λ der Strecke AB nicht begegnet, wähle in der Ebene $l\lambda$ den Punkt F', ausserhalb l und λ, nicht mit A und B auf derselben Seite von λ, und bezeichne mit E' den Durchschnittspunkt von λ und AF', mit D' den von λ und BF', mit C' den von AD' und BE'. Es liegt E' zwischen A und F', D' zwischen B und F', C' zwischen A und D', auch C' zwischen B und E'. Die Geraden CC', DD', EE', FF' nenne ich resp. c, d, e, f; keine drei liegen in einer Ebene, aber die Paare cd, ce, df, ef je in einer Ebene und schneiden sich überdies; denn A und D' liegen auf verschiedenen Seiten von c, A und D auf derselben Seite, folglich D und D' auf verschiedenen, u. s. w: *Wenn nun m und λ einer Ebene angehören, so gehen die Geraden CF und $C'F'$ durch einen Punkt, nämlich G.* Denn in der Ebene $m\lambda$ verlaufen dann die Geraden d und e, nicht aber c oder f; folglich ist der Punkt cd mit ce, df mit ef identisch, und es existirt ein Punkt de, durch welchen c und f hindurchgehen, mithin eine Ebene cf, welche die Punkte C, F, C', F' enthält; der Punkt G liegt in den Ebenen lC' und CFC', also in ihrer Durchschnittslinie $C'F'$. Umgekehrt: *Schneiden sich die Geraden CF und $C'F'$, so gehören m und λ einer Ebene an.* Denn es geht dann eine Ebene durch die Punkte C, F, C', F', oder durch die Strahlen c und f; da d und e von der Ebene cf ausgeschlossen sind, so fällt der Punkt cd mit df, der Punkt ce mit ef zusammen in einen Punkt cf oder de, und die Punkte D, E, D', E' fallen in eine Ebene.

Nunmehr kann ich folgenden Satz beweisen: *Wenn die Strahlenpaare lm, $l\lambda$, $m\lambda$, $l\mu$, $m\mu$ je durch eine Ebene verbunden werden, die Ebene lm aber weder λ noch μ enthält, so wird auch λ mit μ durch eine Ebene verbunden.* Die bisherigen Bezeichnungen werden beibehalten; wenn m oder λ oder μ der Strecke AB begegnet, so haben l, m, λ, μ einen Punkt gemein, mithin λ und μ eine Ebene; es ist daher nur noch der Fall zu betrachten, wo weder l noch λ noch μ der Strecke AB begegnen. In der Ebene $l\mu$ wähle ich den Punkt F'', ausserhalb l und μ, nicht mit A und B auf derselben Seite von μ, und construire E'' als Durchschnittspunkt von μ mit AF'', D'' als Durchschnittspunkt von μ mit BF'', C'' als Durchschnittspunkt von AD'' mit BE''. Da m und λ in einer Ebene vorausgesetzt sind, so gehen die Geraden CF und $C'F'$ durch G; da m und μ ebenfalls in einer Ebene vorausgesetzt sind,

so gehen auch die Geraden CF und $C''F''$ durch G. Da hiernach die Geraden $C'F'$ und $C''F''$ sich schneiden, so existirt eine Ebene $\lambda\mu$.

In Folge dieses Satzes hat es sich als vortheilhaft bewährt, den Begriff des Strahlenbündels entsprechend zu erweitern. Wenn die Strahlen efg paarweise durch eine Ebene verbunden werden, aber nicht alle drei durch eine Ebene, oder wenn die Strahlen efg in einer Ebene enthalten sind und mit einer von ihrer Ebene ausgeschlossenen Geraden durch Ebenen verbunden werden können, so sagt man ohne Rücksicht darauf, wie es sich mit den Durchschneidungen verhalten mag: g liegt im Bündel ef, g ist ein Strahl des Bündels ef u. s. w.; auch e und f heissen wieder „Strahlen des Bündels ef". Schneiden sich e und f, so geht g durch den Punkt ef und ist ein Strahl des Bündels ef in dem bisherigen, dem „eigentlichen" Sinne, oder kürzer: ein Strahl des eigentlichen Strahlenbündels ef, welches nothwendig einen Scheitel besitzt.

Liegen die Strahlen g und h im Bündel ef, so liegen sie in einer Ebene. Beweis: Vorausgesetzt ist die Existenz der Ebenen ef, eg, fg, eh, fh. Der Fall, wo sowohl efg als efh je in einer Ebene liegen, erledigt sich von selbst; der Fall, wo weder efg noch efh in einer Ebene liegen, erledigt sich sofort durch den letzten Lehrsatz. Nehmen wir also an, dass etwa efg in einer Ebene liegen, aber nicht efh; ein gewisser Strahl k ausserhalb der Ebene ef lässt sich dann mit jedem der Strahlen efg durch eine Ebene verbinden; nach dem letzten Satze giebt es eine Ebene hk, welche mindestens eine der Geraden ef ausschliesst, etwa e; da die Strahlen g und h jetzt im Bündel ek liegen, ohne in die Ebene ek zu fallen, so findet der erwähnte Satz auf sie wieder Anwendung.

Liegen die Strahlen g und h im Bündel ef, so liegen e und f im Bündel gh. Beweis: Die Strahlen $efgh$ liegen paarweise in einer Ebene. Geht nun die Ebene ef weder durch g noch durch h, so liegt entweder e ausserhalb der Ebene gh, oder egh in einer Ebene, dann aber f ausserhalb dieser Ebene; beidemal ist e ein Strahl des Bündels gh, ebenso f. Sind efg in einer Ebene, nicht aber efh, so sind auch egh nicht in einer Ebene, d. h. e im Bündel gh, ebenso f. Sind endlich $efgh$ in einer Ebene, so lässt sich eine gewisse Gerade k ausserhalb der Ebene ef mit jedem der Strahlen e, f, g durch eine Ebene verbinden; da k im Bündel ef, so lässt sich k auch mit h durch eine Ebene verbinden, und man erkennt wieder e und f als Strahlen des Bündels gh.

Ist e' ein von f verschiedener Strahl des Bündels ef, so fällt

das Strahlenbündel ef *mit* $e'f$ *zusammen*. Beweis: Bedeutet g einen Strahl des Bündels ef, so ist g entweder von e' verschieden oder nicht; im ersten Falle liegt f im Bündel ge', d. h. g im Bündel $e'f$; im zweiten Falle wird g ebenfalls ein Strahl des Bündels $e'f$ genannt. Jeder Strahl des Bündels ef gehört also zum Bündel $e'f$. Ebenso gehört umgekehrt jeder Strahl des Bündels $e'f$ zum Bündel ef, da e ein von f verschiedener Strahl des Bündels $e'f$ ist.

Sind e' *und* f' *beliebige Strahlen des Bündels* ef, *so sind die Bündel* ef *und* $e'f'$ *identisch*. Beweis: Der Strahl e' ist mindestens von einem der Strahlen e und f verschieden, etwa von f; die Bündel ef und $e'f$ fallen dann mit einander zusammen, weiter auch die Bündel $e'f$ und $e'f'$.

Bei der Angabe des Bündels ef darf ich hiernach e und f durch beliebige Strahlen des Bündels ef ersetzen. Wir werden zur Bezeichnung eines Strahlenbündels bisweilen einen besonderen Buchstaben benutzen; wenn das Bündel einen Scheitel besitzt (eigentliches Strahlenbündel), so wählen wir für Bündel und Scheitel denselben Buchstaben, so dass jede Bezeichnung des Bündels auch Bezeichnung des Scheitels ist. *Durch zwei beliebige Strahlen* e *und* f *in einer Ebene kann man ein Bündel legen.* Ein solches Bündel kann mit ef bezeichnet werden. *Jedes Bündel ist durch zwei beliebige ihm angehörige Strahlen bestimmt.* — Auch beliebig viele Strahlen eines Bündels werden ein Strahlenbündel genannt. Solche Strahlen werden paarweise durch Ebenen verbunden; umgekehrt jedoch ist diese Eigenschaft nur dann entscheidend, wenn die Strahlen nicht durch eine einzige Ebene verbunden werden können. Liegen die Strahlen in einer Ebene, so muss es möglich sein, jeden von ihnen mit einer und derselben ausserhalb ihrer Ebene befindlichen Geraden durch eine Ebene zu verbinden. Demnach sind Strahlen, welche paarweise durch eine Ebene verbunden werden, aber nicht in einem Bündel liegen, allemal in einer Ebene enthalten.

Strahlen, welche in einer Ebene und zugleich in einem Bündel liegen, werden ein Strahlenbüschel genannt, und insbesondere ein eigentliches Strahlenbüschel, wenn sie einen Punkt gemein haben. Liegen efg in einem Büschel, so sagen wir: g liegt im Büschel ef, u. s. w. Zur Bezeichnung des Büschels in diesem Sinne darf man zwei beliebige von seinen Strahlen benutzen, einen einzelnen Buchstaben, nämlich den für das Bündel eingeführten, nur dann, wenn die Ebene besonders angegeben ist.

Ziehen wir jetzt zwei Strahlenbündel S und T in Betracht. Es wird vorkommen, dass beide Bündel einen Strahl g enthalten; denn

wenn eine Gerade g gegeben ist, so kann man verschiedene Bündel mit ihr construiren; aber ein zweiter Strahl h des Bündels S ist niemals in T gelegen. Der Strahl g ist durch die Angabe, dass er zu den Bündeln S und T gehört, eindeutig bestimmt; ich will ihn daher mit ST oder TS bezeichnen, gleichviel ob S und T auch Punkte vorstellen oder nicht. Um die Ausdrucksweise möglichst ebenso einzurichten, wie wenn S und T Punkte wären, will ich sagen: S ist ein Strahlenbündel der Geraden g, das Bündel S gehört zur Geraden g, u. s. w. *Dann ist jede Gerade durch zwei beliebige von ihren Strahlenbündeln bestimmt.* Kann man aber in zwei beliebige Strahlenbündel allemal eine Gerade legen? Diese Frage können wir schon jetzt beantworten, wenn bei einem der gegebenen Bündel ein Scheitel bekannt ist, etwa bei T; im Bündel S nimmt man zwei Strahlen an, l und m, nicht mit dem Punkte T in einer Ebene, und erhält den Strahl ST als Durchschnittslinie der Ebenen lT und mT. *In ein beliebiges und ein eigentliches Strahlenbündel kann man stets eine Gerade legen.* Aber in dem andern Falle können wir hier keine Antwort ertheilen.

Indem wir dazu übergehen, drei Strahlenbündel S, T, U zu betrachten, müssen wir uns von vornherein auf den Fall beschränken, wo wenigstens für eines derselben ein Scheitel bekannt ist, etwa für U. Die Strahlen SU und TU, welche alsdann immer existiren und bestimmt sind, haben einen Punkt gemein, und man kann durch sie eine Ebene legen. Damit diese Ebene nicht unbestimmt bleibe, müssen wir voraussetzen, dass die Strahlen SU und TU von einander verschieden, d. h. dass S, T, U nicht Bündel einer Geraden sind. Ich will die Strahlen SU, TU resp. mit e, f und die Ebene ef mit P bezeichnen. Die Beziehung der Ebene P zum Bündel U ist folgende: P geht durch den Scheitel des Bündels U; wenn ich einen beliebigen Punkt A der Ebene P mit U verbinde, so ist der Strahl AU in der Ebene P enthalten. In ähnlicher Beziehung steht die Ebene P zum Bündel S. Sie ist durch einen Strahl e des Bündels gelegt; nehme ich nun in P den Punkt B beliebig (nicht in e) und bezeichne den Strahl BS mit g, so existirt eine Ebene eg und fällt mit eB zusammen, d. h. g ist eine Gerade von P; für jeden Punkt B der Ebene P (der nicht Scheitel von S ist) fällt also der Strahl BS ganz in P.

Sobald die Ebene P einen Strahl des Strahlenbündels S enthält, wollen wir sagen: S ist ein Strahlenbündel der Ebene P. Dann ist die soeben gemachte Bemerkung folgendermassen auszudrücken: Wenn B ein Punkt und S ein Strahlenbündel der Ebene P ist, so liegt die Gerade BS in der Ebene P. Und wir

schliessen aus der Definition: Ist g eine Gerade der Ebene P, so ist jedes Bündel von g ein Bündel von P.

Wir müssen jetzt die Bündel S, T, U Bündel der Ebene P nennen, welche durch die Strahlen e und f gelegt worden ist. *In zwei beliebige und ein eigentliches Strahlenbündel kann man stets eine Ebene legen.* Eine solche Ebene muss (bei der vorigen Bezeichnung) die Strahlen SU und TU enthalten, welche von einander verschieden sind, wenn die Bündel S, T, U nicht zu einer Geraden gehören. *Eine Ebene ist bestimmt, wenn man von ihr zwei beliebige und ein eigentliches Strahlenbündel kennt und die drei Bündel nicht zu einer Geraden gehören.* Sind S, T, U solche Bündel, so bezeichne ich die durch sie bestimmte Ebene mit STU. Wenn bei keinem der drei Bündel ein Scheitel bekannt ist, so können wir hier nicht entscheiden, ob sie Bündel einer einzigen Ebene, überhaupt Bündel einer Ebene sind.

Es hat sich vorhin ergeben, dass eine Gerade, welche mit einer Ebene einen Punkt und ein Bündel gemein hat, ganz in der Ebene liegt. Dieser Satz lässt sich dahin erweitern, dass *jede Gerade g, welche mit einer Ebene P zwei Bündel S und T gemein hat, zur Ebene P gehört.* Nehme ich in der That den Punkt A in der Ebene P beliebig (ausserhalb g), so ist der Strahl AS von g verschieden und bestimmt mit g, da beide im Bündel S liegen, eine Ebene, zu welcher die Bündel A, S und T gehören, d. i. die Ebene AST, welche mit P identisch ist; folglich ist g eine Gerade von P.

In ein Strahlenbündel S und durch eine Gerade g kann man stets eine Ebene legen. Denn sind A und B Punkte von g, so kann man in die Bündel A, B und S eine Ebene legen. *Eine Ebene ist bestimmt, wenn man von ihr eine Gerade g und ein nicht zu der Geraden gehöriges Bündel S kennt.* Denn sie enthält (bei der vorigen Bezeichnung) die Bündel A, B und S.

Zwei Geraden, welche ein Bündel gemein haben, lassen sich stets durch eine Ebene verbinden.

Fügen wir noch hinzu: *Jede Ebene ist durch zwei beliebige von ihren Geraden bestimmt*, und: *Wenn zwei Ebenen ein eigentliches Bündel gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein,* so sind jetzt die Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, welche die Sätze 4. 5. des ersten und 2.—9. des zweiten Paragraphen enthalten, in Beziehungen zwischen Strahlenbündeln, Geraden und Ebenen verwandelt. Man sieht, dass nicht überall den Punkten beliebige Strahlenbündel substituirt werden können; wo ein Punkt gegeben ist, hat man nicht bloss ein Strahlenbündel, sondern an diesem auch einen Scheitel; mit dem eigentlichen Strahlenbündel

wird daher in gewissen Fällen mehr erreicht. Anders verhält es sich da, wo die Existenz von Punkten ermittelt werden soll. Wenn man nicht nach einem Punkte, sondern nach einem Bündel fragt, und darauf verzichtet, über den Scheitel des Bündels etwas festzustellen, so erhält man eine Antwort in einigen Fällen, wo die Frage nach einem eigentlichen Bündel unbeantwortet blieb.

Von zwei Geraden in einer Ebene, oder von einer Geraden und einer Ebene konnten wir nicht behaupten, dass sie sich immer in einem Punkte schneiden. Aber *ein Strahlenbündel haben zwei Geraden in einer Ebene stets gemein.* Und: *Ein Strahlenbündel hat die Gerade g mit der Ebene P allemal gemein;* denn ist A ein Punkt der Ebene P ausserhalb der Geraden g, so geht durch A eine Gerade h, welche zu den Ebenen gA und P gehört, also durch g und h ein Strahlenbündel, welches zu g und P gehört.

Wir konnten nicht behaupten, dass zwei Ebenen immer Punkte gemein haben, oder dass drei Ebenen stets durch einen Punkt gehen, selbst wenn sie sich paarweise durchschneiden. Aber *gemeinschaftliche Strahlenbündel lassen sich bei zwei Ebenen P und Q stets erzeugen;* denn ist g eine Gerade von Q, so giebt es ein Bündel, welches zu g und P, mithin zu P und Q gehört. Freilich bleibt es, so lange kein gemeinsames eigentliches Bündel bekannt ist, unentschieden, ob die Ebenen eine Gerade gemein haben, d. h. ob die gemeinsamen Bündel zu einer Geraden gehören. Und: *Drei Ebenen P, Q, R haben ein Strahlenbündel gemein, wenn zwei von ihnen, Q und R, sich durchschneiden;* denn die Ebene P hat mit der Geraden QR ein Bündel gemein, und alle Bündel der Geraden QR sind Bündel von Q und R.

Von dem Versuche, Strahlenbündel für die Punkte einzuführen, werden die oben nicht genannten Sätze der beiden ersten Paragraphen nicht berührt. In diesen Sätzen tritt ein auf drei Punkte einer Geraden bezüglicher Begriff auf, der sich nicht auf beliebige Strahlenbündel einer Geraden überträgt; von drei Punkten in einer Geraden ist nämlich allemal einer „zwischen den beiden andern" gelegen. Ich könnte bei drei eigentlichen Strahlenbündeln einer Geraden mich einer entsprechenden Ausdrucksweise bedienen, ich müsste sie jedoch gleich von vornherein auf eigentliche Bündel beschränken. Demgemäss wird die Verallgemeinerung, um die es sich handelt, sich nicht auf solche Sätze erstrecken, zu deren Formulirung jener Begriff oder aus ihm abgeleitete Begriffe erforderlich sind. Dagegen dürfen wir für alle anderen Sätze von jetzt an die Verallgemeinerungen nehmen, welche wir gewonnen haben, und zu denen noch einige neue Sätze hinzugetreten sind.

§ 6. Ausgedehntere Anwendung des Wortes „Punkt".

Wir könnten auf dem Standpunkte, den wir jetzt einnehmen, das Wort „Punkt" gänzlich entbehren und statt dessen bloss von Strahlenbündeln (beliebigen und eigentlichen) sprechen. Wir könnten dann eine Reihe von Beziehungen, zu denen wir allmählich gelangt sind, in eine viel geringere Anzahl von Sätzen zusammenfassen. Aber wenn die Darstellung bei einer solchen Aenderung an Kürze gewinnt, so würde sie zugleich an Anschaulichkeit verlieren, da das Wort „Strahlenbündel" weit complicirtere Vorstellungen veranlasst, als zur Auffassung der geometrischen Entwickelungen nöthig und förderlich ist.

Dieser Nachtheil wird vermieden, wenn man, statt den Gebrauch des Wortes Punkt aufzugeben, ihn vielmehr in derselben Weise ausdehnt, wie es an dem Worte „Strahlenbündel" gezeigt worden ist. Wir treffen in der That die Bestimmung, dass das Wort „Punkt" nicht mehr in der bisherigen Bedeutung angewendet werden soll, dass vielmehr mit der Aussage „das Strahlenbündel S gehört zur Geraden g" fortan gleichbedeutend sein soll die Aussage „der Punkt S liegt in der Geraden g", und dass, wo das Strahlenbündel S als ein eigentliches bezeichnet wird, auch der Punkt S ein eigentlicher Punkt genannt werden soll*). Der Ausdruck „eigentlicher Punkt" wird also von nun an genau dasjenige bedeuten, was bisher unter Punkt schlechtweg verstanden wurde; dadurch eben wird das mit keiner näheren Bestimmung versehene Wort „Punkt" zu allgemeinerer Anwendung verfügbar.

Liegt der Punkt S in einer Geraden der Ebene P, so sagt man: der Punkt S liegt in der Ebene P. Dies ist demnach gleichbedeutend mit der Aussage: das Strahlenbündel S gehört zur Ebene P.

Derselbe Vorgang wiederholt sich in der Mathematik bei zahlreichen ähnlichen Gelegenheiten. So ist man nach der allmählichen Erweiterung des Begriffs, welcher mit dem Worte „Zahl" verbunden wird, genöthigt, den Ausdruck „reelle positive ganze Zahl" da anzuwenden, wo im Anfange das Wort „Zahl" ohne Zusatz genügte; man muss die Function, auf welche das Wort „Potenz"

*) Vergl. Staudt, Geometrie der Lage § 5, wo jedoch als uneigentliche Punkte nur die sog. unendlich fernen Punkte der Euklidischen Geometrie erscheinen. In umfassenderem Sinne hat zuerst Herr F. Klein „uneigentliche" oder „ideale" Punkte eingeführt, Math. Ann. Bd. 4 S. 624, Bd. 6 S. 131 u. 141.

sich ursprünglich bezog, späterhin eine „Potenz mit reellem positiven ganzen Exponenten“ nennen, u. s. w. Kürzer würde man von „eigentlichen“ Zahlen, „eigentlichen“ Potenzen u. s. w. sprechen. Wie man aber nur bei reellen Zahlen die einen „grösser“ als die andern nennt, so kann in der Geraden nur bei drei eigentlichen Punkten davon die Rede sein, dass einer „zwischen den beiden andern“ liegt. Dieser Begriff und vor der Hand auch alle mit seiner Zuziehung definirten Begriffe bleiben mithin auf eigentliche Punkte beschränkt. Im Uebrigen jedoch behalten die bisherigen Definitionen und Bezeichnungen ihre Gültigkeit. Man sagt, dass die Geraden g und h sich schneiden, sobald ein (und zwar nur ein) Punkt in beiden liegt, ohne dass ein gemeinschaftlicher eigentlicher Punkt gefordert wird; man nennt Ebenen, welche einen beliebigen Punkt gemein haben, ein Ebenenbündel, diesen Punkt den Scheitel des Ebenenbündels u. s. w.

An Stelle der Sätze 4. und 5. des ersten und 2.—9. des zweiten Paragraphen treten jetzt die folgenden.

1. Durch einen beliebigen und einen eigentlichen Punkt kann man stets eine Gerade ziehen.

2. Jede Gerade ist durch zwei beliebige von ihren Punkten bestimmt.

3. Durch zwei beliebige und einen eigentlichen Punkt kann man stets eine Ebene legen.

4. Jede Ebene ist bestimmt, wenn von ihr zwei beliebige und ein eigentlicher Punkt gegeben sind und diese drei Punkte nicht in gerader Linie liegen.

5. Eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

6. Durch eine Gerade und einen Punkt kann man allemal eine Ebene legen.

7. Eine Ebene ist bestimmt, wenn man von ihr eine Gerade und einen Punkt ausserhalb der Geraden kennt.

8. Durch zwei Geraden, welche einen Punkt gemein haben, kann man immer eine Ebene legen.

9. Jede Ebene ist durch zwei beliebige von ihren Geraden bestimmt.

10. Wenn zwei Ebenen einen eigentlichen Punkt gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein.

11. Zwei Geraden in einer Ebene haben stets einen Punkt gemein.

12. Eine Gerade und eine Ebene haben stets einen Punkt gemein.

13. Zwei Ebenen haben stets Punkte gemein.

14. Drei Ebenen, von denen zwei sich in einer Geraden schneiden, haben stets einen Punkt gemein. —

Eine beliebige Gruppe von Punkten, Geraden und Ebenen werde eine Figur genannt; dabei werden nicht bloss eigentliche Punkte zugelassen, sondern beliebige. Jede Figur kann erweitert werden. Es können entweder andere Punkte, Geraden, Ebenen nach Willkür hinzutreten oder aus der Figur weitere Punkte als Schnittpunkte ihrer Geraden und Ebenen, weitere Geraden und Ebenen durch Verbindung ihrer Punkte und Geraden abgeleitet (construirt) werden. Das Gebiet der Construction ist aber allemal ein begrenztes, in welchem man ebene Flächen, gerade Strecken und eigentliche Punkte theils gegeben vorfindet, theils nach irgend welchen Vorschriften mit Benutzung der gegebenen Stücke verzeichnet. Wird nun im Verlaufe der Construction ein Punkt E als Durchschnittspunkt zweier Geraden l und m definirt, zu denen Strecken jenes Gebietes gehören, so braucht ein solcher Durchschnittspunkt innerhalb des Gebietes nicht zu existiren, und wenn er sich dort nicht vorfindet, so sind statt seiner bei der Fortsetzung der Construction die ihn darstellenden Geraden l und m zu verwenden. Aber man muss beachten, dass die Möglichkeit, zwei Punkte durch eine Gerade oder drei Punkte durch eine Ebene zu verbinden, nur feststeht, wenn wenigstens einer von ihnen ein eigentlicher Punkt ist.

Ob ein Punkt im Verlaufe der Construction als eigentlicher Punkt resultirt oder nicht, hängt von der gegebenen Figur ab. Bis jetzt verfügen wir nur über ein einziges Mittel, eine solche Frage zu entscheiden; dies ist der 10. Lehrsatz des § 2, der im dritten und vierten Paragraphen noch andere Fassungen erhalten hat. —

Die Figuren, an denen wir bisher die Ableitung der Lehrsätze verfolgen konnten, bestehen aus eigentlichen Punkten, geraden Strecken und ebenen Flächen, welche die Punkte, Geraden und Ebenen, um die es sich handelt, zur Darstellung bringen. Ist von drei eigentlichen Punkten A, B, C die Rede, welche in gerader Linie liegen, so nimmt man in die Figur eine Strecke auf, zu welcher A, B, C gehören; soll der Punkt C zwischen den beiden andern liegen, so bringt man ihn sogleich in entsprechender Weise an, u. s. w. Während des Beweises wird in der Regel eine Erweiterung der Figur nöthig. Wenn nun beispielsweise ursprünglich eine Gerade g und zwei eigentliche Punkte D und E, in einer Ebene mit g, aber auf verschiedenen Seiten von g, vorkommen

und weiterhin auch die Gerade DE und ihr Schnittpunkt F mit der Geraden g in die Betrachtung aufgenommen werden, so vermerkt man eine Strecke der Geraden DE und den eigentlichen Punkt F in der Figur. So wird jede in dem betreffenden Satze gemachte Voraussetzung oder zum Beweise geforderte Construction in anschaulicher Form festgehalten und die Uebersicht über alle Beziehungen erleichtert, welche beim Anblick der Figur rascher in das Gedächtniss zurückkehren und die Erfindungskraft lebhafter anregen, als auf anderem Wege.

Die Fortsetzung unserer Betrachtung bringt uns nun in die Lage, Lehrsätze, in denen beliebige Punkte vorkommen, durch Figuren zu erläutern. Jeder solche Punkt kann in der Figur als eigentlicher Punkt angenommen oder bloss durch zwei seiner Geraden angedeutet werden. Demgemäss kann man in Bezug auf jeden solchen Punkt zwei Fälle zur Darstellung bringen, und mit der Anzahl der Punkte wird die der darzustellenden Fälle sich sehr rasch vermehren. Aber es ist nicht immer nothwendig, auf die verschiedenen Fälle Rücksicht zu nehmen. Wo im Beweise selbst mehrere Fälle unterschieden werden, da mag man auch die einzelnen Fälle an besonderen Figuren erläutern. Wird der Beweis jedoch einheitlich geführt, so erfüllt eine Figur, welche irgend einen Fall veranschaulicht, vollkommen ihren Zweck. Denn die Zuziehung der Figur ist überhaupt nichts Nothwendiges. Sie erleichtert wesentlich die Auffassung der in dem Lehrsatze ausgesprochenen Beziehungen und der etwa zum Beweise angewandten Constructionen; sie ist überdies ein fruchtbares Mittel, um solche Beziehungen und Constructionen zu entdecken. Aber wenn man das Opfer an Mühe und Zeit nicht scheut, so kann man beim Beweise eines jeden Lehrsatzes die Figur fortlassen; der Lehrsatz ist eben nur dann wirklich bewiesen, wenn der Beweis von der Figur vollkommen unabhängig ist.

Die Grundsätze kann man ohne entsprechende Figuren nicht einsehen; sie sagen aus, was an gewissen sehr einfachen Figuren beobachtet worden ist. Die Lehrsätze werden nicht durch Beobachtungen begründet, sondern bewiesen; jeder Schluss, der im Verlaufe des Beweises vorkommt, muss in der Figur seine Bestätigung finden, aber er wird nicht aus der Figur, sondern aus einem bestimmten vorhergegangenen Satze (oder aus einer Definition) gerechtfertigt. Ich habe die betreffenden Sätze Anfangs immer genau angegeben; aber auch da, wo die Angabe der Kürze wegen unterblieben ist, konnte ich mich allemal auf einen bestimmten Satz berufen. Wenn man von dieser Auffassung im Geringsten ab-

weicht, so verliert der Sinn des Beweisverfahrens überhaupt jede Bestimmtheit.

Bei Euklid sehen wir zwischen den Grundsätzen und Lehrsätzen äusserlich eine deutliche Trennung vollzogen. Im ersten Buche der Elemente stehen 35 Definitionen an der Spitze; diese sollen für das erste Buch das vorstellen, was wir ein Verzeichniss der Grundbegriffe und abgeleiteten Begriffe nennen würden, jedoch ohne scharfe Unterscheidung. Sodann werden 3 Postulate und 12 Axiome angeführt; diese 15 Sätze sind als Grundsätze zu betrachten. Ihnen lässt Euklid die Theoreme folgen, in der Meinung — so darf man wohl annehmen —, bis dahin Alles in Bereitschaft gesetzt zu haben, womit die Sätze des ersten Buches bewiesen werden können. Aber schon der erste Beweis lässt die Unvollständigkeit der Sammlung erkennen. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass (in einer Ebene) auf jeder geraden Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck construirt werden kann. Zu dem Zweck wird (in jener Ebene) um den Punkt A mit dem Halbmesser AB ein Kreis beschrieben, ebenso um den Punkt B; vom Punkte C, in welchem die beiden Kreise sich schneiden, zieht man gerade Strecken nach A und B. Für jedes Glied des Beweises und jede in ihm gebrauchte Construction muss nun die Rechtfertigung erbracht werden, und zwar mittels eines vorher aufgestellten Satzes. Dass die beiden Kreise um A und B mit dem Halbmesser AB existiren, folgt in der That aus dem dritten Postulat, wonach gefordert werden darf, (in einer Ebene) um jeden Punkt in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben. Dass die geraden Strecken AC und BC existiren, folgt aus dem ersten Postulate, wonach gefordert werden darf, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Strecke zu ziehen. Also bezüglich der beiden Kreise und der beiden Strecken ist Euklid im Stande, die erforderlichen Hinweise auf frühere Sätze zu geben. Es ist aber, unmittelbar nachdem die beiden Kreise eingeführt sind, vom Punkte C die Rede, in welchem sie sich schneiden. Nach welchem Satze existirt ein derartiger Punkt? Bei Euklid findet sich keine darauf bezügliche Angabe, und diese Lücke kann auch aus seinem Material nicht ergänzt werden, denn es geht dem ersten Lehrsatze keine Aussage voran, wonach jene Kreise sich schneiden müssen.

Wenn es also Euklid's Absicht war, den Lehrsätzen des ersten Buches alle Beweismittel voranzuschicken, um sich später bei jedem Schlusse und jeder Construction auf dieselben berufen zu können, so hat er seine Absicht nicht vollständig erreicht. Er hätte beispielsweise in Rücksicht auf das erste Theorem den Satz mit aufnehmen

müssen: „Zwei Kreise in einer Ebene, deren jeder durch den Mittelpunkt des andern hindurchgeht, schneiden sich"; dieser Satz musste entweder ein Axiom abgeben oder als Theorem auf einen Beweis gestützt werden. Dass hier die dem Satze vom gleichseitigen Dreieck beigegebene Figur allein irregeführt hat, erkennt man sofort, wenn man den Beweis ohne die Figur herzustellen versucht. Nach wie vor kann man dann die beiden Kreise einführen, weil man über das dritte Postulat verfügt; um jedoch von da weiterzukommen, fehlt jede Handhabe, so lange man keine Figur vor Augen hat. Die Figur freilich lässt nicht in Zweifel darüber, ob der Punkt C existirt. Aber die Figur lässt auch die Existenz der Kreise um A und B und der Strecken AC und BC nicht zweifelhaft, und doch wird die Thatsache, dass solche Kreise und Strecken möglich sind, besonders ausgesprochen und angeführt. Mit welchem Rechte werden nun von den Thatsachen, auf denen die Construction beruht, und welche kaum in verschiedenem Grade einleuchtend und durch einfache Beobachtungen verbürgt sind, die einen ausdrücklich formulirt, die andern aber nicht?

Zwischen den Beweisgründen, welche in der Anwendung früherer Sätze und Definitionen bestehen, und andern irgendwelcher Natur werden wir nicht versuchen, eine Grenze zu ziehen — was schwerlich gelingen dürfte —, sondern wir werden nur diejenigen Beweise anerkennen, in denen man Schritt für Schritt sich auf vorhergehende Sätze und Definitionen beruft oder berufen kann. Wenn zur Auffassung eines Beweises die entsprechende Figur unentbehrlich ist, so genügt der Beweis nicht den Anforderungen, welche wir an ihn stellen, — Anforderungen, welche erfüllbar sind; bei einem vollkommenen Beweise ist die Figur entbehrlich. Nicht bloss in der von Euklid überlieferten Form tragen zahlreiche Beweise der Geometrie jene Unvollkommenheit an sich, sondern auch nach den vielfachen Umgestaltungen, welche sie im Laufe der Zeit erfahren haben; nur dass bei Euklid die Irrthümer rein zu Tage treten und nirgends durch Worte verhüllt sind. — Man darf nicht einwenden, dass häufig, ohne Anfertigung der Figur, durch ihre blosse Vorstellung der Zweck erreicht werden kann. Die vorgestellte Figur ist nur zulässig, sofern sie mit einer wirklichen übereinstimmt. Aber selbst wenn irgend eine der Einbildungskraft allein entstammende Figur Berechtigung hätte, so wären wir nicht der Verpflichtung überhoben, von den aus ihr entnommenen Beweismitteln sorgfältig Rechenschaft zu geben*).

*) S. noch § 12 Schluss.

Sobald man der Figur keine andere, als die eben beschriebene Rolle zugesteht, genügt überall, wo in Lehrsätzen und Beweisen nicht mehrere Fälle unterschieden werden, eine einzige nach Belieben entworfene Figur. Demgemäss wird man unbedenklich, wo beliebige Punkte vorkommen, diese in den Figuren nach Möglichkeit durch eigentliche Punkte wiedergeben, selbst dann, wenn es sich gerade um den Fall der eigentlichen Punkte nicht handelt. Dass z. B. drei Geraden den beliebigen Punkt G gemein haben sollen, kann ich wirksam in der Figur nur anbringen, indem ich G als eigentlichen Punkt annehme, und es ist mir allemal nur darum zu thun, die wirksamste Figur zu benutzen. Freilich muss dann mit um so grösserer Vorsicht geprüft werden, ob die einzelnen Punkte sich durch Zufall oder mit Nothwendigkeit als eigentliche ergeben haben.

§ 7. Ausgedehntere Anwendung des Wortes „Gerade“.

Die bisherigen Erörterungen haben nicht entschieden, ob man durch zwei beliebige Punkte eine Gerade ziehen kann, ob gemeinschaftliche Punkte zweier Ebenen in einer Geraden liegen, ob eine Ebene durch drei beliebige ihr angehörige und nicht in einer Geraden enthaltene Punkte bestimmt ist, ob man durch drei beliebige Punkte eine Ebene legen kann. Die drei ersten Fragen hängen mit einander eng zusammen und sollen jetzt in Erörterung gezogen werden; die vierte bleibt dabei zu besonderer Untersuchung vorbehalten.

Es seien A und B beliebige Punkte. Wenn ich einen eigentlichen Punkt D zuziehe, so dass ABD nicht in gerader Linie liegen, so kann

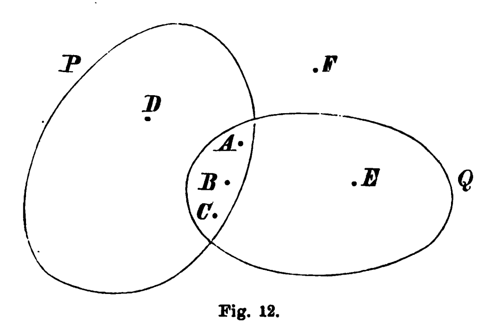


Fig. 12.

ich durch ABD eine bestimmte Ebene P legen; wenn ich einen eigentlichen Punkt E ausserhalb der Ebene P annehme, so geht auch durch ABE keine Gerade, folglich eine bestimmte Ebene Q hindurch.

Die Ebenen P und Q können eine Gerade g gemein haben; ist dies der Fall, so existirt ein Ebenenbüschel PQ mit der Axe g. Durch den beliebigen Punkt F, der nicht zugleich in den Ebenen P und Q liegen soll, geht alsdann eine und zwar nur eine Ebene des Büschels hindurch, welche R heissen mag. Wenn ich mich nun auf einen eigentlichen Punkt F beschränke, so kann ich die Ebene R herstellen, ohne die Axe des Ebenenbüschels zu benutzen; irgend zwei den Ebenen P und Q gemeinschaftliche Punkte A und B genügen, um mit F zusammen die Ebene R zu bestimmen. Auch wenn die Existenz einer den Ebenen P und Q gemeinschaftlichen Geraden nicht feststeht, ist die für die Ebene R angegebene Construction ausführbar. Aber es entsteht die Frage, ob das Ergebniss der Construction unter allen Umständen von den benutzten gemeinschaftlichen Punkten der Ebenen P und Q unabhängig ist, d. h. wenn ABC drei solche Punkte sind, ob die Ebenen ABF und ACF immer zusammenfallen, ob also die Punkte $ABCF$ immer in einer Ebene liegen. Dass dies in der That zutrifft, lässt sich beweisen.

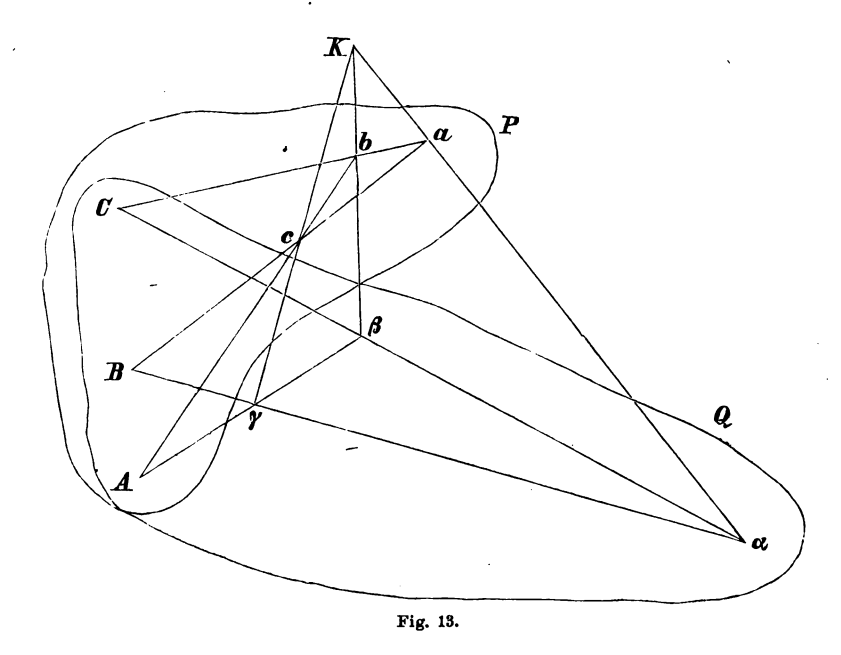


Fig. 13.

Mit ABC werden drei beliebige, zu zwei Ebenen P und Q zugleich gehörige Punkte, mit F ein nicht in jenen Ebenen enthaltener eigentlicher Punkt bezeichnet; weder ABF noch ACF noch BCF liegen also in einer Geraden. Ich nehme den eigentlichen

Punkt α in der Ebene Q beliebig, nicht in P zugleich (so dass weder $AB\alpha$ noch $AC\alpha$ noch $BC\alpha$ in gerader Linie liegen), sodann den eigentlichen Punkt β in der Geraden αC (von C verschieden), mit α auf derselben Seite der Ebene P; die Geraden $A\beta$ und $B\alpha$ sind von einander verschieden und treffen sich in einem Punkte γ. Obgleich nur α und β eigentliche Punkte zu sein brauchen, und gerade der Fall, wo unter den Punkten ABC sich ein eigentlicher befindet, uns nicht interessirt, so tragen wir doch kein Bedenken, auch die Punkte $ABC\gamma$ in den zur Erläuterung dienenden Figuren als eigentliche anzunehmen, in Hinblick auf die der Figur zukommende, nur nebensächliche Bedeutung.

Die Punkte α und β liegen auf derselben Seite von P; auf der andern Seite nehme ich den eigentlichen Punkt K (nicht in Q). Dann wird die Ebene P von der Geraden $K\alpha$ in einem eigentlichen Punkte a zwischen K und α, von der Geraden $K\beta$ in einem eigentlichen Punkte b zwischen K und β, von der Geraden $K\gamma$ in einem Punkte c getroffen. Die Punkte Abc befinden sich zugleich in der Ebene $K\beta\gamma$ (nämlich resp. in den Geraden $\beta\gamma$, $K\beta$, $K\gamma$), die Punkte Bca in der Ebene $K\gamma\alpha$, die Punkte Cab in der Ebene $K\alpha\beta$. Da a und b eigentliche Punkte sind, so folgt hieraus, dass sowohl Abc als Bca und Cab je in einer Geraden liegen.

In der Ebene P wähle ich jetzt den eigentlichen Punkt L beliebig, jedoch ausserhalb der Ebene Q und der Geraden bc, ca, ab, ferner in der Geraden aL den eigentlichen Punkt a' zwischen a und L. Dann sind in der Ebene aKL die Punkte α und a', folglich die Gerade $\alpha a'$ enthalten, welche nicht zwischen a und K, wohl aber zwischen a und L, demnach auch zwischen K und L hindurchgeht, d. h. die Gerade KL wird von $\alpha a'$ in einem eigentlichen Punkte M zwischen K und L überschritten. Den Punkt M kann ich in gleicher Weise, wie dies mit K geschehen ist, verwenden, indem ich die Durchschnittspunkte

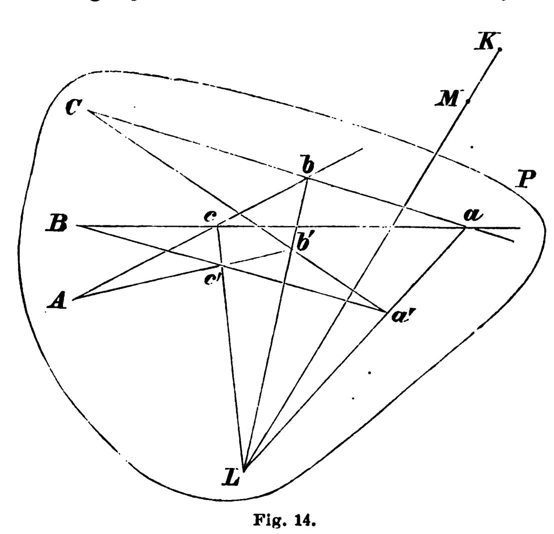


Fig. 14.

der Ebene P mit den Geraden $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ aufsuche. Da nämlich K und M auf derselben Seite der Ebene P liegen, aber K und α auf verschiededenen Seiten, so finden sich weder M und α noch M und β auf derselben Seite vor. Folglich wird die Ebene P nicht bloss von der Geraden $M\alpha$ im eigentlichen Punkte a', sondern auch von der Geraden $M\beta$ in einem eigentlichen Punkte b' getroffen, und zwar liegt a' in der Geraden aL zwischen a und L, b' in der Geraden bL

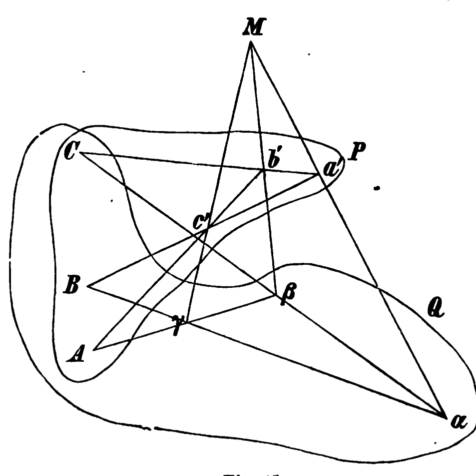


Fig. 15.

(nämlich bLb' in den Ebenen P und βKM) zwischen b und L (da in der Ebene bKL die Gerade $M\beta$ zwischen K und L, aber nicht zwischen K und b hindurchgeht). Endlich wird die Ebene P von der Geraden $M\gamma$ in einem Punkte c' getroffen, welcher zur Geraden cL gehört (nämlich cLc' zu den Ebenen P und γKM). Sowohl $Ab'c'$ als $Bc'a'$ und $Ca'b'$ liegen demnach in geraden Linien, und die Strahlen aa', bb', cc' laufen im Punkte L zusammen. Die in der Ebene P jetzt zu Stande gebrachte Figur enthält die Punkte A, B, C als Durchschnittspunkte der Geraden bc, ca, ab mit resp. $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ und liefert mit Zuziehung der Punkte K und M die in der Ebene Q angenommenen Punkte α, β, γ als Durchschnittspunkte der Strahlen Ka, Kb, Kc mit resp. Ma', Mb', Mc'.

Der eigentliche Punkt F wird ausserhalb der Ebene P vorausgesetzt. In der Verlängerung der Strecke $a'F$ über F hinaus nehme ich den eigentlichen Punkt N (Fig. 16); dann ist in der Ebene $a'LN$ die Gerade aF gelegen und begegnet der Geraden LN in einem eigentlichen Punkte O zwischen L und N; die Strahlen Oa und Na' schneiden sich im eigentlichen Punkte F. In der Ebene $b'LN$ befindet sich der Strahl Ob und trifft den Strahl Nb' in einem eigentlichen Punkte G zwischen b' und N. Die in der Ebene $c'LN$ verlaufenden Strahlen Oc und Nc' endlich liefern einen Durchschnittspunkt H. Die Punkte F, G, H lassen sich durch die Geraden GH, HF, FG verbinden. Da die Ebenen Obc und $Nb'c'$ die Punkte AGH, also auch die Gerade GH gemein haben, so

liegt A in der Geraden GH; ebenso liegt B in der Geraden HF, C in der Geraden FG, und die drei Geraden sind von einander verschieden. Die durch die Punkte FGH bestimmte Ebene umfasst also die gegebenen Punkte ABC, und es sind daher die Ebenen ABF, ACF, BCF mit einander identisch, was zu beweisen war.

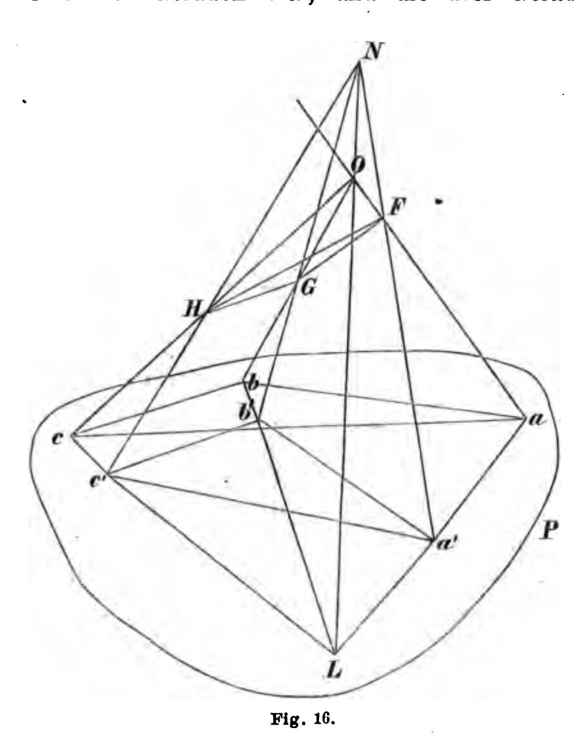


Fig. 16.

Man kann dem Ergebniss folgende Fassung ertheilen: Wenn drei Ebenen P, Q, R zwei Punkte A, B gemein haben, so ist jeder gemeinschaftliche Punkt von zweien auch in der dritten Ebene enthalten. Ist nämlich der Punkt C den Ebenen P und Q gemein, F ein eigentlicher Punkt der Ebene R (nicht in P oder Q), so fallen die Ebenen ABF und ACF zusammen, d. h. C in die Ebene R. Ueberhaupt: Wenn drei oder mehr Ebenen durch zwei Punkte gelegt sind, so gehen durch jeden Punkt, welcher zu zweien gehört, auch die übrigen Ebenen hindurch.

In Erweiterung der bisherigen Definition werden wir jetzt, wenn drei Ebenen P, Q, R zwei Punkte gemein haben, immer sagen: die Ebene R liegt im Ebenenbüschel PQ; gleichviel ob über die Durchschneidung dieser Ebenen in einer Geraden etwas feststeht oder nicht. Haben die Ebenen P und Q eine Gerade gemein, so sagen wir: R liegt im eigentlichen Ebenenbüschel PQ. Aber auch wenn die Durchschneidung von P und Q in einer Geraden nicht feststeht, kann man durch jeden eigentlichen Punkt F eine und zwar nur eine Ebene hindurchführen, welche „im Büschel PQ liegt“; sind nämlich A und B gemeinschaftliche Punkte von P und Q, so fällt die Ebene ABF mit R zusammen. Die Punkte A und B sind gemeinschaft-

liche Punkte für zwei im Büschel PQ beliebig angenommene Ebenen, und indem wir die Benennung „Ebenen des Büschels PQ“ auf P und Q selbst ausdehnen, dürfen wir schliessen, dass *durch zwei beliebige Ebenen stets ein Ebenenbüschel gelegt werden kann*, und dass *das Ebenenbüschel durch irgend zwei ihm angehörige Ebenen bestimmt wird.*

Zur Bezeichnung eines Ebenenbüschels wird auch ein besonderer Buchstabe benutzt; beim eigentlichen Ebenenbüschel halten wir daran fest, dass jede Bezeichnung des Büschels zugleich für die Axe gilt. Irgend ein Ebenenbüschel werde mit g bezeichnet. Ein Punkt, der zu zwei Ebenen des Büschels g gehört, ist gemeinschaftlicher Punkt aller Ebenen dieses Büschels; wir nennen ihn einen Punkt des Ebenenbüschels g. Jede Ebene, welche durch zwei Punkte des Büschels g gelegt wird, ist eine Ebene des Büschels g und enthält somit alle Punkte dieses Büschels. — Wenn g ein eigentliches Ebenenbüschel bedeutet, d. h. wenn g die Benennung einer Geraden ist, so erkennt man die Ausdrücke „Punkt der Geraden g“ und „Punkt des eigentlichen Ebenenbüschels g“ als identisch, ebenso die Ausdrücke „Ebene durch die Gerade g“ und „Ebene des eigentlichen Ebenenbüschels g“.

Demnach könnten wir von jetzt an auf das Wort „Gerade“ gänzlich verzichten und statt dessen bloss von Ebenenbüscheln (beliebigen und eigentlichen) sprechen. Weit zweckmässiger ist es jedoch, den Gebrauch des Wortes „Gerade“ in derselben Weise auszudehnen, wie es bei dem Worte „Ebenenbüschel“ bereits geschehen ist. Wir werden also das Wort „Gerade“ nicht mehr in seiner bisherigen Bedeutung anwenden, sondern wir definiren die Ausdrucksweise „A ist ein Punkt der Geraden g“ als gleichbedeutend mit „A ist ein Punkt des Ebenenbüschels g“. Wenn zugleich festgesetzt wird, dass die Gerade g eine eigentliche Gerade genannt werden soll, sobald g ein eigentliches Ebenenbüschel ist, so tritt fortan der Ausdruck „eigentliche Gerade“ an Stelle des Wortes „Gerade“ ohne Zusatz, welches eine andere Verwendung gefunden hat. Dadurch sollen aber, von der schon beim Strahlenbündel besprochenen Ausnahme abgesehen, die bisherigen Definitionen und Bezeichnungen ihre Gültigkeit nicht verlieren. Beispielsweise nennen wir beliebige Geraden (Strahlen) durch einen Punkt ein Strahlenbündel; wenn alle Punkte der Geraden g in der Ebene R liegen, so sagen wir: die Gerade g liegt in der Ebene R, u. s. w.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze sind jetzt der Erweiterung fähig; nur der dritte bleibt davon unberührt.

1. Durch zwei Punkte kann man stets eine Gerade legen.

Denn legt man die Ebenen P und Q durch die Punkte A und B, so sind A und B Punkte des Ebenenbüschels PQ, also „Punkte einer Geraden“.

2. Jede Gerade ist durch zwei beliebige von ihren Punkten bestimmt.

Sind nämlich A und B Punkte der Geraden g, d. i. Punkte des Ebenenbüschels g, so ist dieses Büschel durch die Punkte A und B bestimmt.

3. Durch zwei beliebige und einen eigentlichen Punkt kann man stets eine Ebene legen.

4. Jede Ebene ist durch drei beliebige von ihren Punkten, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmt.

M. a. W.: Wenn drei Punkte in zwei Ebenen liegen, so liegen sie in einer Geraden.

5. Eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

M. a. W.: Eine Ebene, welche zwei Punkte eines Büschels enthält, geht durch alle Punkte des Büschels.

6. Durch eine eigentliche Gerade und einen beliebigen Punkt, sowie durch eine beliebige Gerade und einen eigentlichen Punkt kann man allemal eine Ebene legen.

7. Jede Ebene ist bestimmt, wenn man von ihr eine Gerade und einen Punkt ausserhalb der Geraden kennt.

8. Durch eine beliebige und eine eigentliche Gerade, welche einen Punkt gemein haben, kann man immer eine Ebene legen.

9. Jede Ebene ist durch zwei beliebige von ihren Geraden bestimmt.

10. Jede Gerade, welche einen eigentlichen Punkt enthält, ist eine eigentliche Gerade.

11. Zwei Geraden in einer Ebene haben stets einen Punkt gemein.

Beweis: In der Ebene P seien die Geraden e und f gelegen; durch irgend einen eigentlichen Punkt M ausserhalb der Ebene P lege ich die Ebenen eM und fM. Da die Ebenen eM und fM sich in einer eigentlichen Geraden schneiden, so haben die Ebenen eM, fM und P einen Punkt N gemein. Der Punkt N liegt in der Geraden e (nämlich in den Ebenen eM und P) und in der Geraden f (nämlich in den Ebenen fM und P).

12. Eine Gerade und eine Ebene haben stets einen Punkt gemein.

Beweis: Ist die Gerade h und die Ebene P gegeben (h nicht

in P), und wird irgend eine durch h gelegte Ebene mit Q, das Ebenenbüschel PQ mit g bezeichnet, so sind g und h Geraden der Ebene Q und schneiden sich demnach. Der Punkt gh ist der Geraden h und der Ebene P gemein.

13. Zwei Ebenen haben stets eine Gerade gemein.

Beweis: Durch die Ebenen P und Q kann man ein Ebenenbüschel PQ legen. Wird dieses mit g bezeichnet, so sind P und Q „Ebenen durch die Gerade g" zu nennen.

14. Drei Ebenen haben stets einen Punkt oder eine Gerade gemein.

Beweis: Von den Ebenen P, Q, R liefern irgend zwei eine Durchschnittslinie, etwa P und Q die Gerade g. Diese liegt entweder in der Ebene R oder hat mit ihr einen Punkt gemein. Im letzteren Falle ist gR der Schnittpunkt der Ebenen P, Q, R. —

Abgesehen vom zehnten Satze, haben wir kein Mittel, um zu entscheiden, ob eine gewisse Construction zu einer eigentlichen Geraden führen muss oder nicht. Ich wende dabei das Wort Construction in erweitertem Sinne an, — wie auch der Sinn des Wortes Figur eine Erweiterung erfährt, — indem ich nämlich statt der eigentlichen Geraden jetzt auch beliebige Geraden zulasse. Eine Gerade giebt man durch zwei von ihren Punkten oder von ihren Ebenen an. Durch die Begegnung zweier Geraden in einer Ebene, oder einer Geraden und einer Ebene, oder dreier Ebenen werden neue Punkte, durch die Verbindung zweier Punkte oder den Schnitt zweier Ebenen werden neue Geraden eingeführt; nur zur Herstellung von Ebenen können wir nicht beliebige Elemente verwenden, sondern müssen über einen eigentlichen Punkt oder eine eigentliche Gerade verfügen. Aber überall, wo keine eigentliche Gerade gefordert wird, kann man von der Geraden selbst absehen und mit zwei Punkten oder zwei Ebenen, welche ihr angehören, operiren. Die Nothwendigkeit eines solchen Ersatzmittels kann durch die beschränkte Ausdehnung des Constructionsgebietes herbeigeführt werden.

Nach den Erörterungen, mit denen der vorige Paragraph geschlossen wurde, bedarf es kaum noch der Erwähnung, dass man überall, wo die Betrachtung durch Figuren erläutert wird, in diesen statt beliebiger Geraden eigentliche anwenden darf und nach Möglichkeit auch anwenden wird, weil die Figuren alsdann ihren Zweck nur um so besser erfüllen. Diesen wichtigen Vortheil hätte man der Geometrie nicht zugänglich machen können, wenn man die Anwendung der Worte „Punkt" und „Gerade" nicht in der Ausdehnung durchgeführt hätte, welche sich als zulässig darbot und

zunächst durch eine erhöhte Geschmeidigkeit der Sprache bewährte.

Eine gewisse Gattung von Sätzen ist auf eigentliche Punkte und eigentliche Geraden beschränkt geblieben, weil nur von drei eigentlichen Punkten in einer Geraden gesagt werden kann, dass einer zwischen den beiden andern liegt. Ein Theil jener Sätze enthält aber nicht den der Ausdehnung sich entziehenden Begriff direct, sondern den abgeleiteten Begriff getrennter Paare. Dieser letztere erweist sich nun der Uebertragung in demselben Umfange fähig, wie die Begriffe des Punktes, der Geraden und der Ebene selbst, und ich will ihn jetzt für beliebige Punkte in einer beliebigen Geraden bilden. Der Uebertragung auf beliebige Punkte in einer eigentlichen Geraden stand schon im vorigen Paragraphen nichts im Wege; sie würde jedoch eine Wiederholung derselben Betrachtungsweise an der gegenwärtigen Stelle uns nicht erspart haben.

In einer beliebigen Geraden l werden die Punkte $ABCD$ angenommen. Versteht man unter M und M' eigentliche Punkte ausserhalb der Geraden l, unter U und U' die Ebenen lM und lM', unter $efgh$ die eigentlichen Strahlen MA, MB, MC, MD in der Ebene U, unter $e'f'g'h'$ die eigentlichen Strahlen $M'A$, $M'B$, $M'C$, $M'D$ in der Ebene U', so werden entweder fg durch eh oder ge durch fh oder ef durch gh getrennt. Ich nehme an, dass ef durch gh getrennt werden, und führe den Nachweis, dass alsdann auch $e'f'$ durch $g'h'$ getrennt werden. Dieser Nachweis ergiebt sich aus den am Ende des § 4 gegebenen Sätzen zunächst für den Fall, wo die Ebenen U und U' von einander verschieden sind. Bezeichne ich dann die durch die eigentliche Gerade MM' gehenden Ebenen ee', ff', gg', hh' mit $PQRS$, so werden nach dem vorletzten Satze des § 4 die Ebenen PQ durch RS, mithin nach dem letzten auch die Strahlen $e'f'$ durch $g'h'$ getrennt. Wenn die Ebenen U und U' in eine einzige zusammenfallen, so wird ausserhalb derselben ein eigentlicher Punkt M'' angenommen und durch die Strahlen $e''f''g''h''$ mit $ABCD$ verbunden. Wir wissen jetzt, dass $e''f''$ durch $g''h''$ getrennt werden, und können daraus das behauptete Verhalten der Strahlen $e'f'g'h'$ schliessen. Die Erscheinung, dass die Strahlen MA, MB durch die Strahlen MC, MD getrennt

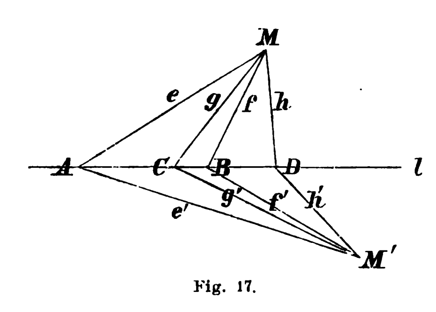


Fig. 17.

werden, ist demnach von der Wahl des eigentlichen Punktes M unabhängig und hat eine Spaltung der in der Geraden l angenommenen Punkte $ABCD$ in zwei Paare AB und CD zur Folge.

Diese Spaltung fällt mit einer schon betrachteten zusammen, sobald $ABCD$ eigentliche Punkte sind. Alsdann ist nämlich l eine eigentliche Gerade; gehörten in ihr die Punkte C und D zur Strecke AB, so lägen die Schenkel MC und MD zwischen den Schenkeln MA und MB, und es wären ef nicht durch gh getrennt. Also liegen C und D nicht beide innerhalb der Strecke AB; ebensowenig können beide ausserhalb dieser Strecke liegen; es wird sich vielmehr der eine Punkt innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke befinden, d. h. die Punkte AB werden durch CD getrennt. Dadurch wird es nahe gelegt, in einer beliebigen Geraden und für beliebige Punkte zu sagen, dass AB durch CD getrennt werden (oder dass C zwischen A und B liegt bei ausgeschlossenem D, für den Grenzpunkt D), sobald unter Zuziehung eines eigentlichen Punktes M ausserhalb jener Geraden die Strahlen MA, MB durch MC, MD getrennt sind. Indem wir diese Ausdrucksweise einführen, dürfen wir alle Sätze, welche von getrennten Punktepaaren in einer Geraden handeln und von nichts Anderem, auf beliebige Punkte in einer beliebigen Geraden in vollem Umfange übertragen.

Liegen die Punkte $ABCE$ in einer Geraden, so werden entweder BC durch AE getrennt, oder CA durch BE, oder AB durch CE, und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden andern aus.

Liegen die Punkte ABE in einer Geraden, so kann man in ihr den Punkt C so wählen, dass AB durch CE getrennt werden.

Sind in einer Geraden die Punkte AB durch eines der Paare CE und DE getrennt, durch das andere aber nicht, so sind AB durch CD getrennt. In den andern Fällen werden AB durch CD nicht getrennt.

Werden in einer Geraden die Punkte AB durch CE getrennt, so werden auch CE durch AB getrennt.

§ 8. Ausgedehntere Anwendung des Wortes „Ebene".

Durch die Sätze 3. 6. 8. des vorigen Paragraphen wird die Frage veranlasst, ob man durch drei Punkte, durch eine Gerade und einen Punkt, durch zwei einander schneidende Geraden eine Ebene legen kann, ohne über einen eigentlichen Punkt oder eine eigentliche Gerade zu verfügen. Es seien ABC beliebige Punkte, nicht in gerader Linie. Wenn durch ABC eine Ebene hindurch-

geht, so sind AB, AC, BC Geraden dieser Ebene, welche auch durch die Gerade AB und den Punkt C oder durch die Geraden AB und AC bestimmt wird; nehme ich in der Geraden AB den Punkt D (von A und B verschieden) und in der Geraden AC den Punkt E (von A und C verschieden, also D von E verschieden), so ist unter derselben Voraussetzung auch DE eine Gerade jener Ebene und muss der Geraden BC in einem Punkte begegnen. Ich werde jetzt nachweisen, dass dieses Verhalten der Geraden BC und DE von der Existenz einer durch ABC gehenden Ebene unabhängig ist, d. h. dass die Geraden BC und DE sich unter allen Umständen schneiden.

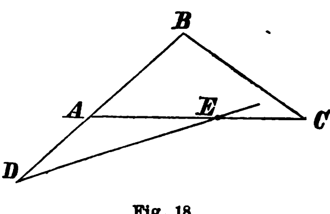


Fig. 18.

Zum Beweise*) nehme ich eine eigentliche Gerade zu Hülfe, welche keiner der vier Geraden AB, AC, BC, DE begegnet, und in ihr die eigentlichen Punkte KLM derart, dass ABC weder mit K noch mit M durch Ebenen verbunden werden können. In der Geraden MA wähle ich den eigentlichen Punkt α (von M und A verschieden) und bezeichne den Durchschnittspunkt der Geraden KA und $L\alpha$ in der Ebene AKM mit a. Endlich lege ich durch a eine Ebene P, welche keinen der bisher erwähnten Punkte ausser a enthält. Die Ebene P wird vom Strahl KA in a getroffen; sie mag von den Strahlen KB, KC, KD, KE in den Punkten b, c, d, e überschritten werden. Diese Punkte sind unter einander und von den vorigen verschieden; abc liegen nicht in gerader Linie; dagegen liegen abd in einer Geraden (in den Ebenen P und ABK), ebenso ace (in den Ebenen P und ACK). Sind $a'b'c'd'e'$ die Durchschnittspunkte der Ebene P mit den Strahlen MA, MB, MC, MD, ME, so sind auch die Punkte $a'b'c'd'e'$ unter einander und von den Punkten $ABCDEKLM\alpha$ verschieden; $a'b'd'$ und $a'c'e'$ liegen je in einer Geraden, aber nicht $a'b'c'$. Da diese Figuren in einer Ebene enthalten sind, so

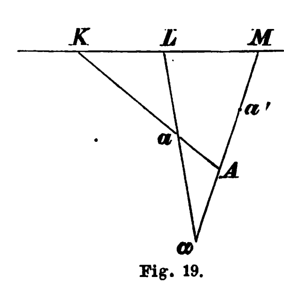


Fig. 19.

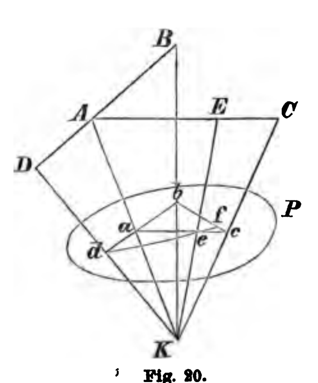


Fig. 20.

*) Zuerst in einer Vorlesung December 1873 gegeben.

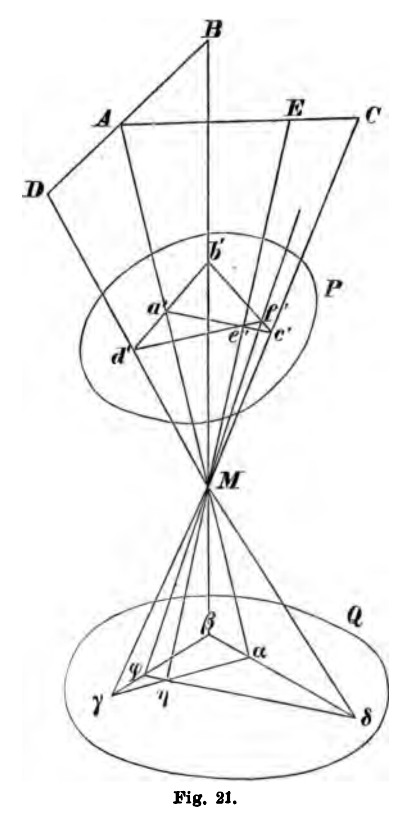


Fig. 21.

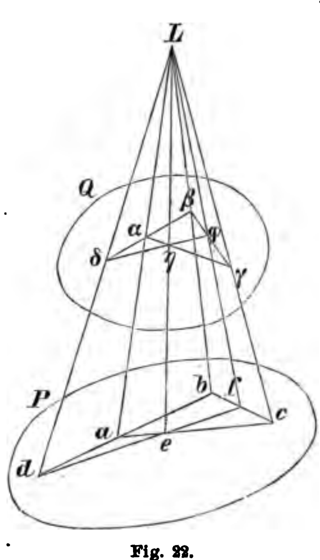


Fig. 22.

begegnen sich die Geraden bc und de in einem Punkte f, die Geraden $b'c'$ und $d'e'$ in einem Punkte f'. Wenn unsere Behauptung richtig ist, wonach BC und DE einen Punkt gemein haben, so müssen in ihm die Strahlen Kf und Mf' sich begegnen, wie Ka und Ma' in A, Kb und Mb' in B, Kc und Mc' in C, Kd und Md' in D, Ke und Me' in E. Wir wollen also untersuchen, ob Kf und Mf' in einer Ebene liegen; dazu ist es aber nöthig, die Constructionen fortzusetzen.

Die Strahlen La und Ma' haben den eigentlichen Punkt α gemein. Auch die Strahlen Lb und Mb' erzeugen, da sie in der Ebene BKM verlaufen, einen Durchschnittspunkt β, und ebenso die Strahlen Lc und Mc', Ld und Md', Le und Me' Durchschnittspunkte γ, δ, η. Es ist leicht zu ersehen, dass die Punkte α, β, δ und α, γ, η je in einer Geraden liegen; denn die Ebenen abL und $a'b'M$ sind von einander verschieden und haben die Punkte $\alpha\beta\delta$ gemein, die Ebenen acL und $a'c'M$ sind ebenfalls von einander verschieden und haben die Punkte $\alpha\gamma\eta$ gemein. Aber die Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegen nicht in gerader Linie, weil die Strahlen MA, MB, MC nicht in einer Ebene liegen, und bestimmen demnach eine Ebene Q, welche die Gerade $\alpha\beta$ mit dem Punkte δ und die Gerade $\alpha\gamma$ mit dem Punkte η enthält. Wenn nun die Strahlen Kf und Mf' in einer Ebene liegen, so muss dieselbe Ebene auch die Strahlen Lf und Mf' mit einander verbinden; der

gemeinschaftliche Punkt dieser beiden Strahlen kann aber jetzt in der That angegeben werden.

In der Ebene Q befinden sich nämlich die Geraden $\beta\gamma$ und $\delta\eta$; sie haben daher einen Punkt φ gemein ($LM\varphi$ liegen nicht in gerader Linie). Die Punkte $Lf\varphi$ liegen in einer Geraden (in den Ebenen bcL und deL), ebenso die Punkte $Mf'\varphi$ (in den Ebenen $b'c'M$ und $d'e'M$); folglich begegnen sich die Geraden Lf und Mf' in φ, und in der Ebene $LM\varphi$ werden die Geraden Kf und Mf' sich in einem Punkte F begegnen. Die Punkte BCF liegen in einer Geraden (in den Ebenen bcK und $b'c'M$), ebenso die Punkte DEF (in den Ebenen deK und $d'e'M$); folglich haben die Geraden BC und DE den Punkt F gemein, und damit ist der in Aussicht gestellte Beweis geliefert.

Die Punkte $BCDE$ waren der Bedingung unterworfen, dass keine drei in einer Geraden liegen, dass aber die Geraden BD und CE sich in einem Punkte A begegnen.

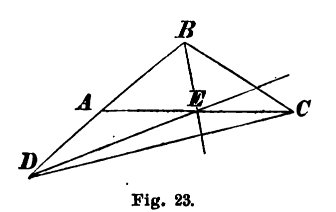


Fig. 23.

Da nun diese Bedingung die Durchschneidung der Geraden BC und DE nach sich zieht, so hat sie in gleicher Weise auch die Durchschneidung der Geraden CD und BE zur Folge. Von der Forderung, dass von den Punkten $BCDE$ keine drei in gerader Linie liegen sollen, kann man aber absehen und daher folgenden Satz aussprechen: *Sind die Punkte $ABCD$ so gewählt, dass die Geraden BC und AD einander treffen, so schneiden sich auch die Geraden CA und BD, ebenso die Geraden AB und CD.*

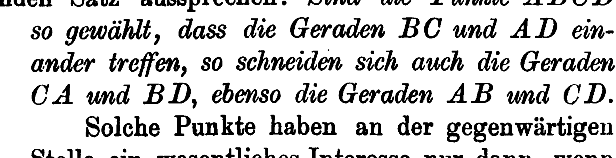


Fig. 24.

Solche Punkte haben an der gegenwärtigen Stelle ein wesentliches Interesse nur dann, wenn keine drei in einer Geraden liegen, wenn also der Schnittpunkt E der Geraden BC und AD in keinen jener vier Punkte fällt. Wenn durch die Punkte ABC eine Ebene hindurchgeht, so ist E ein Punkt, AE eine Gerade dieser Ebene, folglich D in der Ebene ABC gelegen. Aber auch wenn eine durch ABC gehende Ebene sich nicht ermitteln lässt, werden wir sagen, dass der Punkt D in der Ebene ABC liegt, indem wir das Wort „Ebene“ nicht auf seine bisherige Bedeutung beschränken. Wir drücken von jetzt an mit den Worten „D liegt in der Ebene ABC“, wobei zunächst von den Punkten $ABCD$ keine drei in gerader Linie vorausgesetzt werden, nichts weiter als die Eigenschaft aus, dass die Geraden BC und AD, mithin auch

CA und BD, AB und CD sich schneiden, während wir die Benennung „eigentliche Ebene" überall anwenden werden, wo nach dem bisher festgehaltenen Sprachgebrauche von einer Ebene ohne Zusatz die Rede sein würde. Die Punkte ABC können dabei beliebig umgestellt werden, und es liegt zugleich A in der Ebene BCD u. s. w.

Der Punkt E liegt in der Geraden BC, ohne mit B oder C zusammenzufallen; A liegt ausserhalb BC. Ich erhalte einen „in der Ebene ABC gelegenen" Punkt D, indem ich in der Geraden AE einen Punkt beliebig annehme; nur A oder E selbst darf ich nicht wählen, so lange alle in der obigen Definition enthaltenen Bestimmungen aufrecht erhalten werden. Es ist zweckmässig, diese Ausnahmestellung der Punkte A und E in der Geraden AE zu beseitigen und auch die Punkte der Geraden BC, CA und AB (also insbesondere die Punkte A, B, C selbst) „Punkte der Ebene ABC" zu nennen, jedoch ohne an der Bestimmung, dass ABC nicht in gerader Linie liegen sollen, etwas zu ändern.

Sind ABC beliebige Punkte, aber nicht in einer Geraden, so kann man von einer Ebene ABC reden, d. h. man kann einen Punkt D so annehmen, dass er „in der Ebene ABC liegt", und zwar kann man dazu nicht bloss einen Punkt in der Geraden BC oder CA oder AB, sondern stets auch einen Punkt ausserhalb dieser drei Geraden wählen. In der Geraden AB nenne ich F einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit C durch D hindurchgeht; die Geraden AB und CF sind von einander verschieden, und jeder Punkt der Geraden CF liegt in der Ebene ABC. Daran ändert sich aber nichts, wenn ich A und B durch zwei beliebige Punkte der Geraden AB ersetze. Ist also A' irgend ein von B verschiedener Punkt der Geraden AB, so liegt D auch in der Ebene $A'BC$.

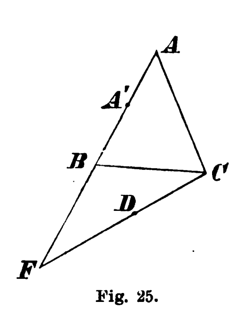


Fig. 25.

Diese Bemerkung lässt sich aber verallgemeinern, indem man nur zu fordern braucht, dass A' in der Ebene ABC und ausserhalb der Geraden BC liegt. Die Geraden BC und AA' schneiden sich in einem Punkte G, welcher in B oder C fallen kann; er sei von B verschieden. Jeder Punkt der Ebene ABC liegt dann in der Ebene ABG, folglich in der Ebene $A'BG$, mithin auch in der Ebene $A'BC$. Da hiernach A selbst zur Ebene

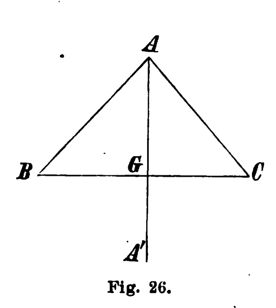


Fig. 26.

$A'BC$ gehört, so liegt jeder Punkt der Ebene $A'BC$ auch in der Ebene ABC. Die Ebenen ABC und $A'BC$ sind identisch.

Jetzt seien $A'B'C'$ beliebige Punkte der Ebene ABC, aber nicht in einer Geraden. Dann ergiebt sich, wie beim Beweise des Lehrsatzes 3. in § 2, die Identität der Ebenen ABC und $A'B'C'$. *Die Ebene ABC ist also durch die Forderung, dass sie die drei nicht in gerader Linie gelegenen Punkte $A'B'C'$ enthalten soll, völlig bestimmt.*

Alle auf die Ebenen bezüglichen Definitionen und Bezeichnungen werden beibehalten, abgesehen von den Ausnahmen, welche bereits bei den Begriffen „Punkt“ und „Gerade“ erwähnt werden mussten. Wir können daher die Erweiterungen, welche jetzt in den Sätzen 1.—14. des vorigen Paragraphen eintreten (unter Wiederholung der Sätze, deren Inhalt keine Aenderung erfährt), folgendermassen aussprechen.

1. Durch zwei Punkte kann man stets eine Gerade legen.

2. Jede Gerade ist durch zwei beliebige von ihren Punkten bestimmt.

3. Jede Gerade, welche einen eigentlichen Punkt enthält, ist eine eigentliche Gerade.

4. Durch drei Punkte kann man stets eine Ebene legen.

5. Jede Ebene ist durch drei beliebige von ihren Punkten, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmt.

6. Jede Ebene, welche einen eigentlichen Punkt enthält, ist eine eigentliche Ebene.

7. Eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

Denn sind A, B, C Punkte einer Ebene P, nicht in gerader Linie, also die Ebene ABC mit P identisch, so müssen alle Punkte der Geraden AB „Punkte der Ebene ABC“ genannt werden.

8. Durch eine Gerade und einen Punkt kann man stets eine Ebene legen.

9. Jede Ebene ist bestimmt, wenn man von ihr eine Gerade und einen Punkt ausserhalb der Geraden kennt.

10. Durch zwei Geraden, welche einen Punkt gemein haben, kann man immer eine Ebene legen.

11. Jede Ebene ist durch irgend zwei von ihren Geraden bestimmt.

12. Zwei Geraden in einer Ebene haben stets einen Punkt gemein.

Beweis: In der Ebene P mögen die Geraden e und f liegen. Nimmt man zwei Punkte A und B in der Geraden e beliebig, zwei

Punkte C und D in der Geraden f derart, dass C nicht in e liegt, also A, B, C nicht in gerader Linie, dann ist die Ebene ABC mit P identisch, und D liegt in der Ebene ABC. Folglich haben die Geraden AB und CD einen Punkt gemein. —

Was nun die Durchschneidung einer Geraden mit einer Ebene oder die Durchschneidung zweier Ebenen anbelangt, so wissen wir zunächst nur, dass eine Gerade und eine eigentliche Ebene stets einen gemeinschaftlichen Punkt, zwei eigentliche Ebenen stets eine gemeinschaftliche Gerade besitzen. Daraus kann ich aber jetzt folgern, dass auch eine eigentliche Ebene und eine beliebige Ebene allemal eine Gerade gemein haben. Nehme ich in der That den Punkt A in der beliebigen Ebene P, ausserhalb der eigentlichen Ebene Q, und ziehe in P durch A zwei Geraden, so treffen diese die eigentliche Ebene Q in zwei Punkten B und C, und die Ebenen P, Q haben die Gerade BC gemein.

13. Eine Gerade und eine Ebene haben stets einen Punkt gemein.

Beweis: Die Gerade h sei nicht ganz in der Ebene P gelegen. Nimmt man den eigentlichen Punkt A ausserhalb von h, so ist h eine Gerade der eigentlichen Ebene hA. Die Ebenen P und hA haben eine Gerade k gemein, h und k schneiden sich in einem Punkte; dieser Punkt ist in h und P enthalten.

14. Zwei Ebenen haben stets eine Gerade gemein.

Beweis: In der Ebene P nehme ich den Punkt A ausserhalb der Ebene Q und ziehe durch ihn zwei Geraden in P. Von diesen wird Q in zwei Punkten B und C getroffen, und die Gerade BC liegt zugleich in P und Q.

15. Drei Ebenen haben stets einen Punkt oder eine Gerade gemein. —

So lange eine Ebene nicht als eigentliche erkannt ist, bleibt man darauf angewiesen, sie durch drei Punkte oder durch eine Gerade und einen Punkt oder durch zwei Geraden darzustellen. Dennoch brauchen wir uns nicht hindern zu lassen, wenn eine beliebige Ebene vorkommt und die Betrachtung durch eine Figur erläutert wird, jene Ebene in der Figur als eigentliche Ebene zu behandeln, wie dies bezüglich der Punkte und Geraden geschah. Ist also von vier Strahlen $efgh$ die Rede, welche in einer beliebigen Ebene U verlaufen und sich in einem Punkte M begegnen sollen, so trage ich kein Bedenken, ein solches Strahlenbüschel in einer eigentlichen Ebene und mit einem eigentlichen Scheitel zu entwerfen und mich darauf zu beziehen. Wird in der Ebene U eine beliebige Gerade l (nicht durch M) angenommen, so gebe ich sie

in der Figur unbedenklich als eigentliche Gerade und die Punkte $ABCD$, in denen $efgh$ von l getroffen werden, als eigentliche Punkte wieder. Die Punkte $ABCD$ zerfallen derart in zwei Paare, dass die des einen Paares durch die des andern getrennt werden; es seien etwa AB durch CD getrennt. Nenne ich l' eine andere Gerade der Ebene U (nicht durch M) und $A'B'C'D'$ ihre Durchschnittspunkte mit $efgh$, so geht aus folgenden Ueberlegungen hervor, dass auch $A'B'$ durch $C'D'$ getrennt werden. Man wähle ausserhalb

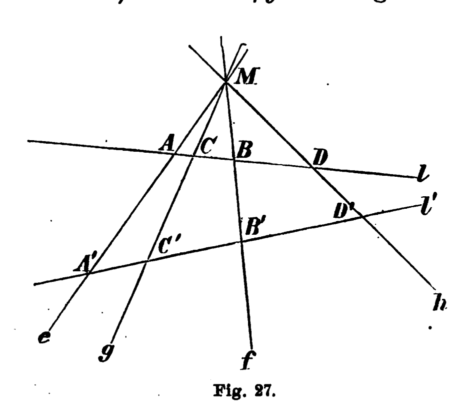


Fig. 27.

der Ebene U irgend einen eigentlichen Punkt N, von dem aus nach M die eigentliche Gerade G gezogen wird, und verbinde G mit den Geraden $efgh$ durch die eigentlichen Ebenen $PQRS$. Da diese Ebenen von der eigentlichen Ebene lN in den Strahlen NA, NB, NC, ND eines Büschels mit dem eigentlichen Scheitel N getroffen, da ferner zufolge der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition die Strahlen NA und NB durch die Strahlen NC und ND getrennt werden, so ergiebt sich aus dem vorletzten Satze des § 4, dass die Ebenen PQ durch RS getrennt sind. Da endlich die Ebenen $PQRS$ von der eigentlichen Ebene $l'N$ in den Strahlen NA', NB', NC', ND' eines Büschels mit dem eigentlichen Scheitel N getroffen werden, so sind nach dem letzten Satze des § 4 die Strahlen NA' und NB' durch NC' und ND', folglich nach der eben angezogenen Definition auch die Punkte $A'B'$ durch $C'D'$ getrennt.

Wie ich also in der Ebene U die Gerade l (nicht durch M) annehmen mag, immer tritt dieselbe Paarung der Strahlen $efgh$ dadurch ein, dass die Punkte el und fl durch gl und hl getrennt werden. Sobald M ein eigentlicher Punkt, mithin U eine eigentliche Ebene und $efgh$ eigentliche Geraden sind, ergiebt sich die jener Paarung angemessene Benennung, wenn man auf die Punkte $ABCD$ die mehrerwähnte Definition anwendet; dann zeigen sich nämlich ef als durch gh getrennt. In Uebereinstimmung mit der für den besondern Fall bereits in Gebrauch befindlichen Ausdrucksweise werden wir in jedem Falle sagen, dass ef durch gh getrennt werden (oder dass g zwischen e und f liegt für den Grenzstrahl h), sobald unter Zuziehung einer beliebigen Geraden l in der

Ebene des Büschels (nicht durch dessen Scheitel) die Punkte el und fl durch gl und hl getrennt sind. *Alle in § 3 für getrennte Strahlenpaare in einem Strahlenbüschel aufgestellten Sätze gelten in vollem Umfange weiter.*

Es erübrigt noch, dieselbe Begriffserweiterung am Ebenenbüschel vorzunehmen. Durch eine beliebige Gerade G seien jetzt die beliebigen Ebenen $PQRS$ gelegt. Werden von einer Ebene U (die G nicht enthält) die Axe G dieses Ebenenbüschels im Punkte M, die Ebenen $PQRS$ in den Geraden $efgh$ geschnitten, so bilden $efgh$ ein Strahlenbüschel; es seien etwa ef durch gh getrennt. Von einer andern Ebene U' (die G nicht enthält) mögen G im Punkte M' und $PQRS$ in den Geraden $e'f'g'h'$ geschnitten werden; dann behaupte ich, dass auch $e'f'$ durch $g'h'$ getrennt sind. Es seien nämlich zuerst die Punkte M und M' von einander verschieden. Dann wird G von der Durchschnittslinie l der Ebenen U und U' nicht getroffen, und die Durchschnittspunkte $ABCD$ der Geraden l mit den Ebenen $PQRS$ sind von einander verschieden. Im Punkte A begegnen sich nun die Ebenen U, U' und P, folglich auch die Strahlen e und e', ebenso in B die Strahlen f und f', in C die Strahlen g und g', in D die Strahlen h und h'. Aus der in Betreff der Strahlen $efgh$ gemachten Voraussetzung folgt daher mit Rücksicht auf die soeben am Strahlenbüschel gegebenen Definitionen, dass die Punkte AB durch CD, und daraus weiter, dass die Strahlen $e'f'$ durch $g'h'$ getrennt werden. Wenn aber die Punkte M und M' zusammenfallen, so nimmt man eine Ebene U'' zu Hülfe, welche die Axe G in einem von M verschiedenen Punkte M'' und die Ebenen $PQRS$ in den Strahlen $e''f''g''h''$ schneidet. Dann schliessen wir zuerst, dass $e''f''$ durch $g''h''$, und daraus wieder, dass $e'f'$ durch $g'h'$ getrennt werden.

Ist G eine eigentliche Gerade, sind also $PQRS$ eigentliche Ebenen, so verlege man M nach einem eigentlichen Punkte von G, so dass U eine eigentliche Ebene und $efgh$ eigentliche Strahlen werden; man findet dann, dass die Ebenen PQ durch RS getrennt sind (vorletzter Satz in § 4). Wir wollen jedoch in allen Fällen sagen, dass PQ durch RS getrennt werden (oder R zwischen P und Q für die Grenzebene S), sobald unter Zuziehung einer beliebigen Ebene U (nicht durch die Axe des Ebenenbüschels) die Strahlen PU und QU durch RU und SU getrennt werden. *Auch jetzt gelten alle Sätze weiter, welche in § 4 für getrennte Ebenenpaare in einem Büschel ausgesprochen worden sind.*

Die am Ebenenbüschel gegebene Definition lässt sich noch durch eine andere ersetzen. Man verstehe unter l eine beliebige

Gerade, welche die Axe nicht trifft, unter $ABCD$ die Schnittpunkte von l mit den vier Ebenen und unter M irgend einen Punkt der Axe. Sind nun die Punkte AB durch CD getrennt, so sind auch die Strahlen MA und MB durch MC und MD getrennt, und umgekehrt. Es werden also die Ebenen PQ durch RS getrennt oder nicht, je nachdem unter Zuziehung einer die Axe nicht schneidenden Geraden l die Punkte Pl und Ql durch Rl und Sl getrennt werden oder nicht.

Ueberhaupt seien $ABCD$ vier beliebige Punkte einer Geraden; mit einem beliebigen Punkte ausserhalb dieser Geraden werden $ABCD$ durch die Strahlen $efgh$ verbunden; durch diese vier Strahlen, mithin zugleich durch jene vier Punkte, werden endlich die Ebenen $PQRS$ eines Büschels gelegt. Wenn alsdann in einer der drei Figuren $ABCD$, $efgh$, $PQRS$ die beiden ersten Elemente (Punkte, Strahlen, Ebenen) durch die beiden letzten getrennt werden, so findet in den beiden andern Figuren dasselbe statt.

§ 9. Ausgedehntere Anwendung des Wortes „zwischen".

Die bisherigen Ergebnisse sind ohne Ausnahme aus den in § 1 und § 2 aufgestellten Grundsätzen hergeleitet worden; dabei wurden aber von § 3 an nicht mehr die Grundsätze selbst, sondern die aus ihnen gewonnenen Lehrsätze, also im Grunde die Sätze 4.—9. und 12. des § 1 und die Sätze 2. 3. 4. 9. 10. des § 2 benutzt. Diese Lehrsätze bezogen sich auf eigentliche Punkte, eigentliche Geraden, eigentliche Ebenen. Nach der Erweiterung, welche die Bedeutung der Worte „Punkt", „Gerade" und „Ebene" erfahren hat, ist ein Theil jener Sätze gültig geblieben und konnte daher in die in § 8 aufgestellte Uebersicht wieder aufgenommen werden; es traten sogar einige neue Sätze hinzu, und eben in diesem Zuwachs ist der Werth der durchgeführten Begriffserweiterungen zu erblicken. Zwei Geraden in einer Ebene haben jetzt immer einen Punkt gemein, ebenso eine Gerade und eine Ebene; zwei Ebenen haben immer eine Gerade, drei Ebenen einen Punkt gemein. Dadurch werden die Unterscheidungen erspart, welche bei der Beschränkung auf eigentliche Elemente nothwendig wären.

Die Sätze 4. 5. in § 1 und 2. 3. 4. 9. in § 2 liessen sich auf beliebige Elemente übertragen, nicht aber die Sätze 6. 7. 8. 9. 12. in § 1 und der Satz 10 in § 2. Indess ist der Begriff der getrennten Punktepaare in einer Geraden auch für beliebige Punkte in einer beliebigen Geraden eingeführt worden und hat wieder zu den Sätzen geführt, welche in § 1 für solche Paare aufgestellt worden

waren (§ 7 extr.). Dieser Begriff gestattet, so lange man sich nur in einer Geraden bewegt, vollkommene Analogie zu den Beziehungen, welche für eigentliche Punkte in den Sätzen 6. 7. 8. 9. 12. des § 1 ausgesprochen sind. Um die Analogie deutlich hervortreten zu lassen, sagen wir: „Der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B bei ausgeschlossenem Punkte D (für den Grenzpunkt D)“, wenn $ABCD$ Punkte einer Geraden und AB durch CD getrennt sind. Es mögen vier Punkte $ABCD$ in solcher Lage angenommen werden. Wenn sie sämmtlich eigentliche Punkte sind, so liegt von den Punkten C, D der eine zwischen A und B, der andere aber nicht. Wenn ABC eigentliche Punkte sind und C zwischen A und B liegt, so ist D kein Punkt der Strecke AB. Wenn A und B eigentliche Punkte sind, D kein Punkt der Strecke AB, so ist C ein eigentlicher Punkt und liegt zwischen A und B; denn wenn man die Punkte $ABCD$ mit einem eigentlichen Punkte M ausserhalb der Geraden AB verbindet, so werden die Strahlen MA, MB durch MC, MD getrennt, und es liegen die Schenkel MA und MB auf derselben Seite der Geraden MD, folglich ein Schenkel des Strahles MC zwischen den Schenkeln MA und MB, d. h. MC trifft AB zwischen A und B.

Werden also mit A, B, C, D Punkte einer Geraden und zwar mit A, B eigentliche Punkte bezeichnet, so werden AB durch CD getrennt, wenn von den Punkten C und D der eine ein eigentlicher Punkt zwischen A und B ist, der andere aber nicht, und umgekehrt.

Nur der Satz 10. in § 2 ist in keiner Weise auf beliebige Elemente übertragen worden. Es seien ABC eigentliche Punkte, nicht in gerader Linie; eine Gerade der Ebene ABC schneide die Geraden BC, CA, AB resp. in a, b, c. Jener Satz sagt dann aus, dass wenn a der Strecke BC, aber b nicht der Strecke CA angehört, c sich innerhalb der Strecke AB befindet.

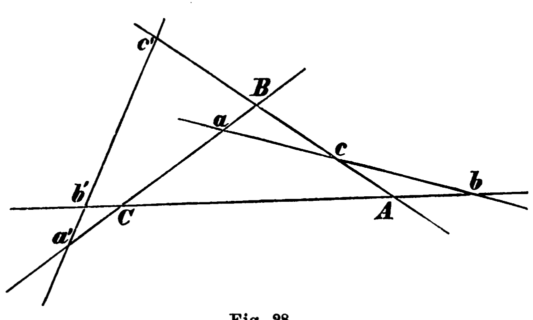


Fig. 28.

Da aber in der Ebene ABC eine Gerade d, welche BC, CA, AB resp. in a', b', c' schneidet, so angenommen werden kann, dass weder a' in der Strecke BC noch b' in der Strecke CA noch c' in der Strecke AB liegt, so können wir unter Zuziehung einer solchen

Geraden den Satz dahin formuliren, dass die Punkte AB durch cc' getrennt werden, wenn BC durch aa' und CA nicht durch bb' getrennt werden.

In der letzten Fassung gilt nun der Satz über die ursprünglichen Grenzen hinaus und erlangt dadurch, sofern man in einer Ebene bleibt, die Bedeutung eines Analogon zu § 2 Satz 10. Es wird dies klar hervortreten, wenn wir folgende Ausdrucksweise einführen. Sind $\alpha\beta\gamma\delta$ Punkte einer Geraden, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, d eine andere Gerade durch δ, so wollen wir sagen: Der Punkt γ liegt zwischen α und β bei ausgeschlossener Geraden d oder für den Grenzstrahl d.

Ist nämlich in einer Ebene die „auszuschliessende Gerade" gegeben, so wird durch sie in jeder andern Geraden der Ebene der „auszuschliessende Punkt" bestimmt. Die Sätze b—f in § 1 gelten jetzt für beliebige Punkte in einer beliebigen Geraden der Ebene (ausser d) auch dann, wenn der Punkt E durch die Gerade d ersetzt wird, und es tritt, wie bereits angedeutet, der Satz hinzu:

1. Sind die Punkte ABC und der Strahl d in einer Ebene enthalten, welche durch die drei Punkte bestimmt wird, und werden die Verbindungslinien BC CA AB von einem andern Strahl resp. in abc so getroffen, dass für den Grenzstrahl d der Punkt a zwischen B und C liegt, aber b nicht zwischen C und A, so liegt c zwischen A und B für den Grenzstrahl d.

Mit diesem Satze steht ein auf das Strahlenbündel bezüglicher in genauem Zusammenhange, nämlich:

2. Liegen die Strahlen EFG in einem Bündel, aber nicht in einer Ebene, ist H eine Ebene durch den Scheitel des Bündels, und werden die Ebenen FG GE EF von einer andern, ebenfalls durch den Scheitel gelegten Ebene resp. in den Strahlen efg so getroffen, dass für die Grenzebene H der Strahl e zwischen F und G liegt, aber f nicht zwischen G und E, so liegt g zwischen E und F für die Grenzebene H.

Hier ist wieder eine neue Ausdrucksweise angewendet worden; wenn nämlich in einer Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ Strahlen eines Büschels sind, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, H eine zweite Ebene durch δ, so sage ich: der Strahl γ liegt zwischen α und β für die Grenzebene H. Die beiden Sätze werden im Zusammenhange bewiesen. Wenn die Geraden BC CA AB von d in den Punkten $a'b'c'$ und die Ebenen FG GE EF von H in den Strahlen $e'f'g'$ geschnitten werden, so wird das eine Mal vorausgesetzt, dass BC durch aa' getrennt werden, CA nicht durch bb', und dann sollen AB durch

cc' getrennt werden; das andere Mal wird vorausgesetzt, dass FG durch ee' getrennt werden, GE nicht durch ff', und dann sollen EF durch gg' getrennt werden.

Der erste Satz ist bereits bewiesen für den Fall, wo ABC eigentliche Punkte sind und die Gerade d weder zwischen B und C noch zwischen C und A noch zwischen A und B hindurchgeht. Um den zweiten Satz zunächst für Bündel mit eigentlichem Scheitel zu beweisen, nehme ich in den Strahlen EFG (also nicht in gerader Linie) die eigentlichen Punkte ABC auf derselben Seite der Ebene H. Dann liegen die Punkte B und C auf derselben Seite des Strahles e', die Punkte C und A auf derselben Seite des Strahles f', die Punkte A und B auf derselben Seite des Strahles g'. Werden nun die Geraden BC CA AB von efg in abc und von $e'f'g'$ in $a'b'c'$ getroffen, so liegen die Punkte abc in gerader Linie, ebenso die Punkte $a'b'c'$, aber a' nicht in der Strecke BC, b' nicht in der Strecke CA, c' nicht in der Strecke AB. Der Voraussetzung zufolge werden FG durch ee' getrennt, aber GE nicht durch ff', folglich auch BC durch aa', aber CA nicht durch bb'. Daraus schliesst man endlich, dass AB durch cc' getrennt werden, mithin auch EF durch gg'.

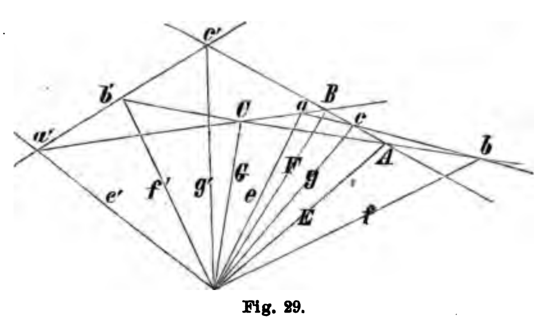


Fig. 29.

Der erste Satz kann jetzt allgemein bewiesen werden. Zieht man nämlich von einem eigentlichen Punkte ausserhalb der Ebene ABC nach den Punkten $ABC\,abc\,a'b'c'$ die Strahlen EFG efg $e'f'g'$, so liegen EFG nicht in einem Büschel; dagegen liegen efg in einer Ebene, desgleichen $e'f'g'$, $FGee'$, $GHff'$, $EFgg'$, d. h. die Ebenen FG, GH, EF werden von einer durch den Scheitel des Bündels EF gelegten Ebene in den Strahlen efg, von einer andern Ebene durch denselben Punkt in $e'f'g'$ geschnitten. Da BC durch aa' getrennt werden, aber CA nicht durch bb', so werden FG durch ee' getrennt, aber GE nicht durch ff'. Folglich werden EF durch gg' getrennt, also auch AB durch cc'.

Um endlich den zweiten Satz allgemein zu beweisen, durchschneide ich die Strahlen EFG efg $e'f'g'$ mit einer Ebene, welche den Scheitel des Bündels nicht enthält, in den Punkten $ABC\,abc\,a'b'c'$ Die Punkte ABC liegen nicht in gerader Linie, wohl aber a

$a'b'c'$, $BCaa'$, $CAbb'$, $ABcc'$. Man schliesst zuerst, dass BC durch aa' getrennt werden, aber CA nicht durch bb'; daraus weiter, dass AB durch cc' getrennt werden, also EF durch gg'.

Wir haben eine Gerade benutzt, um für jede geradlinige Punktreihe (ausserhalb dieser Geraden) in einer Ebene den „auszuschliessenden Punkt“ zu bestimmen. Wir haben eine Ebene benutzt, um für jedes Strahlenbüschel (ausserhalb dieser Ebene) in einem Strahlenbündel den „auszuschliessenden Strahl“ zu bestimmen. Man kann in gleicher Weise einen Punkt benutzen, um für jedes Strahlenbüschel (dessen Scheitel nicht in diesen Punkt fällt) in einer Ebene den „auszuschliessenden Strahl“ zu bestimmen. Wenn nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$ Strahlen eines Büschels sind, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, m ein Punkt von δ (nicht der Scheitel), so sage ich: der Strahl γ liegt zwischen α und β für den Grenzpunkt m. Endlich wird eine Gerade benutzt, um für jedes Ebenenbüschel (dessen Axe nicht in diese Gerade fällt) in einem Ebenenbündel die „auszuschliessende Ebene“ zu bestimmen. Sind nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$ Ebenen eines Büschels, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, s eine Gerade der Ebene δ (nicht die Axe), so sage ich: Die Ebene γ liegt zwischen α und β für den Grenzstrahl s.

Man darf jetzt in den Sätzen des § 3 den Strahl k durch die Ebene H oder den Punkt m, in denen des § 4 die Ebene T durch die Gerade s ersetzen.

Werden die obigen Definitionen angenommen, so bieten sich zwei weitere Sätze dar.

3. Sind die Geraden JKL und der Punkt m in einer Ebene enthalten, die drei Geraden nicht in einem Büschel, und werden die Punkte KL LJ JK mit einem andern Punkte derselben Ebene resp. durch die Strahlen ikl so verbunden, dass für den Grenzpunkt m der Strahl i zwischen K und L liegt, aber K nicht zwischen L und J, so liegt l zwischen J und K für den Grenzpunkt m.

4. Liegen die Ebenen PQR in einem Bündel, aber nicht in einem Büschel, ist s ein Strahl durch den Scheitel des Bündels, und werden die Geraden QR RP PQ mit einer andern, ebenfalls durch den Scheitel gelegten Geraden resp. durch die Ebenen pqr so verbunden, dass für den Grenzstrahl s die Ebene p zwischen Q und R liegt, aber q nicht zwischen R und P, so liegt r zwischen P und Q für den Grenzstrahl s.

Auch diese beiden Sätze werden im Zusammenhange bewiesen. Bezeichnet man mit ABC die Punkte KL LJ JK und mit $i'k'l'$ die Strahlen Am Bm Cm, ferner mit EFG die Strahlen QR RP PQ

und mit $p'q'r'$ die Ebenen $Es\ Fs\ Gs'$, so wird im dritten Satze angenommen, dass KL durch ii' getrennt werden, LJ nicht durch kk', und behauptet, dass dann JK durch ll' getrennt werden; im vierten Satze wird angenommen, dass QR durch pp' getrennt werden, RP nicht durch qq', und behauptet, dass PQ durch rr' getrennt werden.

Ich beweise zunächst den dritten Satz für den Fall, wo ABC eigentliche Punkte sind und i' zwischen B und C, k' zwischen C und A hindurchgeht. In diesem Falle ist m ein eigentlicher Punkt und liegt zwischen A und Ji', B und Kk', C und Ll'; wenn also K und k sich in x begegnen, so ist x ein Punkt der Strecke CA, und i geht nicht zwischen B und x hindurch; folglich geht auch l nicht zwischen B und x hindurch, d. h. JK werden durch ll' getrennt. — Das Ergebniss benutze ich, um den vierten Satz für Ebenenbündel mit eigentlichem Scheitel zu beweisen. Bei einem solchen Bündel wähle ich den eigentlichen Punkt C im Strahl G beliebig und die eigentlichen Punkte A und B resp. in E und F derart, dass die Ebene q' zwischen C und A, die Ebene p' zwischen B und C hindurchgeht; ABC liegen nicht in gerader Linie. Die Ebenen $PQR\ pqr\ p'q'r'$ mögen von der Ebene ABC in den Geraden $JKL\ ikl\ i'k'l'$ getroffen werden; dann begegnen sich $KLii'$ in A, $LJkk'$ in B, $JKll'$ in C, und auch ikl, $i'k'l'$ liegen je in einem Strahlenbüschel; überdies werden KL durch ii' getrennt, aber LJ nicht durch kk'; und endlich liegen B und C auf verschiedenen Seiten von i', C und A auf verschiedenen Seiten von k'. Nach dem Vorangeschickten werden auch JK durch ll' getrennt, mithin PQ durch rr'.

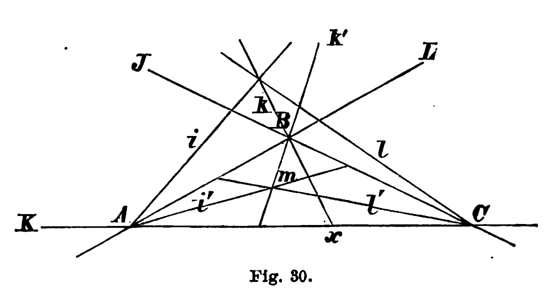


Fig. 30.

Der allgemeine Beweis des dritten Satzes ergiebt sich nun, indem man die (jetzt beliebigen) Punkte ABC mit einem eigentlichen Punkte ausserhalb der Ebene ABC durch Strahlen EFG und die Geraden $JKL\ ikl\ i'k'l'$ mit demselben Punkte durch Ebenen $PQR\ pqr\ p'q'r'$ verbindet, so dass die Ebenen $QRpp'$ durch E, $RPqq'$ durch F, $PQrr'$ durch G gehen und auch pqr, $p'q'r'$ je in einem Ebenenbüschel liegen. Man findet dann, dass QR durch pp' getrennt werden, aber RP nicht durch qq'; daraus folgt, dass PQ durch rr', also JK durch ll' getrennt werden. — Endlich ergiebt

sich der allgemeine Beweis des vierten Satzes, indem man aus den Ebenen PQR pqr $p'q'r'$ mit irgend einer Ebene, welche nicht durch den Scheitel des Ebenenbündels geht, Strahlen JKL ikl $i'k'l'$ herausschneidet.

Wie der erste und dritte Satz nur von ebenen Figuren (Planfiguren), so handeln auch der zweite und vierte von Figuren einer besonderen Art, insofern nur Strahlen und Ebenen vorkommen, welche einen und denselben Punkt enthalten; solche Figuren, aus Strahlen eines Strahlenbündels und Ebenen eines Ebenenbündels mit einerlei Scheitel (Mittelpunkt) zusammengesetzt, mögen centrische Figuren heissen*). Die Begriffsbildungen dieses Paragraphen sind noch nicht abgeschlossen, weil sie nur bei Planfiguren in einerlei Ebene oder bei centrischen Figuren mit einerlei Scheitel brauchbar sind. Es bedarf einer Bestimmung, nach welcher in allen Ebenen der Grenzstrahl, also in allen Geraden der „auszuschliessende Punkt" angegeben werden kann. Dies wird durch Einführung irgend einer Ebene N geleistet; sind nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$ Punkte einer Geraden ausserhalb der Ebene N, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, δ der Durchschnittspunkt der Geraden und der Ebene, so sage ich: „der Punkt γ liegt zwischen α und β für die Grenzebene N". Aehnliche Bestimmungen werden für die Strahlen- und Ebenenbüschel getroffen. Sind $\alpha\beta\gamma\delta$ Strahlen eines Büschels, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, n eine Gerade (nicht durch den Scheitel), δ der sie schneidende Strahl des Büschels, so sage ich: „der Strahl γ liegt zwischen α und β für den Grenzstrahl n". Sind $\alpha\beta\gamma\delta$ Ebenen eines Büschels, $\alpha\beta$ durch $\gamma\delta$ getrennt, ν ein Punkt ausserhalb der Axe, δ die durch ihn gehende Ebene des Büschels, so sage ich: „die Ebene γ liegt zwischen α und β für den Grenzpunkt ν". Man darf jetzt in die Sätze des § 1 für den Grenzpunkt E die Ebene N, in die des § 3 für den Grenzstrahl k die Gerade n, in die des § 4 für die Grenzebene T den Punkt ν einführen und erhält überdies folgende Fassungen der obigen vier Sätze:

a) *Sind die Punkte ABC nicht in einer Geraden enthalten, und werden die Verbindungslinien BC CA AB von einer andern Geraden resp. in abc so getroffen, dass für die Grenzebene N der Punkt a zwischen B und C liegt, aber b nicht zwischen C und A, so liegt c zwischen A und B für die Grenzebene N.*

b) *Liegen die Strahlen EFG in einem Bündel, aber nicht in einem Büschel, und werden die Ebenen FG GE EF von einer*

*) Staudt, Geometrie der Lage, Vorwort.

durch den Scheitel gelegten Ebene resp. in efg so getroffen, dass für den Grenzstrahl n der Strahl e zwischen F und G liegt, aber f nicht zwischen G und E, so liegt g zwischen E und F für den Grenzstrahl n.

c) *Sind die Geraden JKL in einer Ebene enthalten, aber nicht in einem Büschel, und werden die Punkte KL LJ JK mit einem Punkte derselben Ebene resp. durch ikl so verbunden, dass für den Grenzstrahl n der Strahl i zwischen K und L liegt, aber k nicht zwischen L und J, so liegt l zwischen J und K für den Grenzstrahl n.*

d) *Sind die Ebenen PQR nicht in einem Büschel enthalten, und werden die Strahlen QR RP PQ mit einer Geraden resp. durch $p\,q\,r$ so verbunden, dass für den Grenzpunkt v die Ebene p zwischen Q und R liegt, aber Q nicht zwischen R und P, so liegt r zwischen P und Q für den Grenzpunkt v.* —

Die Uebertragung der Sätze 6.—9. und 12. in § 1 und des Satzes 10. in § 2 auf beliebige Punkte, welche weder auf eine Gerade noch auf eine Ebene beschränkt sind, ist jetzt geleistet, soweit sie möglich ist. Freilich nicht in der einfachen Weise, wie bei den andern Fundamentalsätzen; denn an Stelle des auf eigentliche Punkte bezüglichen Begriffes „zwischen", welcher bei drei eigentlichen Punkten einer Geraden stets anwendbar war, musste ein auf beliebige Punkte bezüglicher Begriff gebildet werden, welcher bei drei Punkten einer Geraden nicht ohne Weiteres anwendbar ist, sondern die Festlegung einer Ebene N voraussetzt. Aus dem neuen Begriffe kann man weitere ableiten, welche gewissen im ersten, dritten und vierten Paragraphen abgeleiteten Begriffen entsprechen, aber, mit bestimmter Ausnahme, noch die Ebene N wesentlich enthalten. Die Ausnahme ist folgende: Wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ Punkte einer Geraden sind, γ zwischen α und β für die Grenzebene N, δ aber nicht, oder umgekehrt, so ist diese Beziehung von der Ebene N unabhängig, die Punkte $\alpha\beta$ werden durch $\gamma\delta$ getrennt. Es wird also kein auf vier Punkte einer Geraden und eine Ebene bezüglicher Begriff erzeugt, ebenso wenig ein ähnlicher Begriff im Strahlen- oder Ebenenbüschel.

Das Streben, möglichst viele Figuren, welche Anhaltspunkte zu gleichmässiger Behandlung darbieten, unter einen Gesichtspunkt zu bringen, hat die „eigentliche" Bedeutung der elementaren geometrischen Benennungen immer mehr in den Hintergrund gedrängt. Es ist nöthig geworden, jene Benennungen durchweg in dem allgemeinsten Sinne, der sich ihnen (bis jetzt) ertheilen liess, so lange anzuwenden, als nicht durch besondere Forderungen die Beschr-

kung auf den „eigentlichen" Sinn bedingt wird. Wenn demgemäss zu einer gegebenen Figur eine andere, mit jener in vorgeschriebenem Zusammenhange stehende verlangt wird, so behandeln wir die Aufgabe in ihrem allgemeinen Sinne und suchen für die unbekannte Figur eine Construction, welche nach einheitlicher Vorschrift in allen möglichen Fällen angewendet werden kann. Erst im Resultate finden die etwa vorhandenen einschränkenden Forderungen ihre Berücksichtigung.

Die Analysis verfährt in gleicher Weise, wenn zu gegebenen Zahlen eine andere, mit jenen in vorgeschriebenem Zusammenhange stehende berechnet werden soll. Sie lehrt, wie sämmtliche unter den allgemeinsten Zahlenbegriff sich unterordnende Lösungen gefunden werden, unbekümmert um die Veranlassung des Problems, deren Natur häufig eine specielle Zahlengattung bedingt.

§ 10. Perspective Figuren.

Im vorigen Paragraphen sind Planfiguren und centrische Figuren wiederholt zu einander in Beziehung gesetzt worden, um Eigenschaften solcher Figuren zu beweisen. Mit einem Punkte ausserhalb ihrer Ebene wurden die Punkte einer Planfigur durch Strahlen, ihre Geraden durch Ebenen verbunden und so der Uebergang von einer Planfigur zu einer mit ihr eng zusammenhängenden centrischen Figur bewerkstelligt. Mit einer Ebene, welche den Scheitel nicht enthält, wurden die Strahlen einer centrischen Figur in Punkten, ihre Ebenen in Geraden durchschnitten und so der umgekehrte Uebergang vollzogen. Man nennt bei solcher Lage die beiden Figuren perspectiv, die Planfigur einen Schnitt der centrischen Figur.

Es seien ab .. die Punkte, $\alpha\beta$ .. die Geraden einer Planfigur, $a'b'$ .. die Strahlen, $\alpha'\beta'$ .. die Ebenen einer centrischen Figur, deren Scheitel nicht in der Ebene der Planfigur enthalten ist; die Anzahl der Punkte ab .. sei gleich der der Strahlen $a'b'$ .., die Anzahl der Geraden $\alpha\beta$ .. gleich der der Ebenen $\alpha'\beta'$ ..; der Punkt a sei in a', b in b', .., die Gerade α in α', β in β', .. enthalten. Die Figuren ab .. $\alpha\beta$ .. und $a'b'$ .. $\alpha'\beta'$ .. sind alsdann perspectiv und man nennt in ihnen aa', bb', .., $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, .. homologe Elemente; die Angabe der Elemente erfolgt allemal in solcher Reihenfolge, dass je zwei homologe Elemente die gleichen Plätze einnehmen. Von jedem Elemente der Planfigur können wir sagen, dass es in dem homologen liegt; von jedem Elemente der centrischen Figur, dass es durch das homologe hindurchgeht. Um eine gleich-

mässigere Ausdrucksweise zu ermöglichen, wollen wir von einem Punkte und einer Geraden, wenn der Punkt zu der Geraden gehört, auch sagen: der Punkt liegt **an** der Geraden, die Gerade liegt **an** dem Punkte; diese Festsetzung mag sich auch auf Punkt und Ebene, sowie auf Gerade und Ebene beziehen. Wir werden also sagen: Je zwei homologe Elemente der beiden perspectiven Figuren liegen aneinander*). Und die charakteristische Eigenschaft der beiden Figuren können wir jetzt so aussprechen: *Liegen zwei Elemente der einen Figur aneinander, so sind auch in der andern Figur die homologen Elemente aneinander gelegen.*

Nimmt man in der Ebene der Planfigur einen beliebigen Punkt m, so gehört er entweder zu der Planfigur oder kann zu ihr hinzugefügt werden; jedenfalls wird er mit dem Scheitel der centrischen Figur durch einen bestimmten Strahl m' verbunden, welcher bei der Betrachtung solcher perspectiven Figuren der homologe Strahl zum Punkte m genannt wird. Ueberhaupt gehört zu jedem Element, um welches die eine Figur sich erweitern lässt, ein „homologes" Element, um welches die andere sich erweitern lässt. *So oft also Punkte der Planfigur in einer Geraden liegen, bilden die homologen Strahlen ein Büschel, und umgekehrt;* und *so oft Strahlen der Planfigur durch einen Punkt gehen, gehen die homologen Ebenen durch eine Gerade, und umgekehrt.* Daher entspricht dem Schnittpunkte zweier Geraden der Planfigur die Schnittlinie der homologen Ebenen, der Verbindungslinie zweier Punkte der Planfigur die Verbindungsebene der homologen Strahlen.

Jedem Theile der Planfigur entspricht ein homologer Theil der perspectiven centrischen Figur; diese Theile sind wieder in perspectiver Lage. Beispielsweise entspricht einer geraden Punktreihe ein Strahlenbüschel, so dass perspective Figuren in einer Ebene entstehen; und wenn in einer dieser Figuren zwei Paare von Elementen durch einander getrennt werden, so findet zwischen den homologen Paaren die gleiche Beziehung statt. Ein Strahlenbüschel und eine gerade Punktreihe sind perspectiv, wenn die Punktreihe ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. — Einem Strahlenbüschel als Planfigur entspricht ein Ebenenbüschel als perspective centrische Figur; das Strahlenbüschel ist ein Schnitt des Ebenenbüschels; der Scheitel des ersteren liegt in der Axe des letzteren und ist also der Scheitel einer centrischen Figur, welche sich aus dem Strahlen-

*) Solche Elemente werden von einigen Geometern incident genannt nach Grassmann; vgl. Sturm, Mathem. Ann. Bd. 12 S. 258, Schubert, ebendas. S. 181.

und dem Ebenenbüschel zusammensetzt. Getrennten Paaren des einen Büschels entsprechen wieder getrennte Paare im andern Büschel. — Man nennt endlich auch eine gerade Punktreihe und ein Ebenenbüschel perspectiv, wenn beide sich in perspectiver Lage mit einem Strahlenbüschel (also nicht bloss mit einem) befinden. Auch hier sind je zwei homologe Elemente aneinander gelegen, die Punktreihe kann ein Schnitt des Ebenenbüschels genannt werden, und die getrennte Lage von Paaren der einen Figur überträgt sich allemal auf die homologen Elemente.

Die gerade Punktreihe ist unter die ebenen Figuren, das Ebenenbüschel unter die centrischen, das Strahlenbüschel unter beide zu rechnen. Wir können daher zusammenfassend den Satz aussprechen: *So oft in einer Planfigur zwei Elementenpaare einander trennen, sind in jeder perspectiven centrischen Figur die homologen Paare durch einander getrennt, und umgekehrt**). — Eine gerade Punktreihe und ein perspectives Strahlenbüschel können als Theile einer Planfigur erscheinen; dann sind in jeder perspectiven centrischen Figur die homologen Theile auch unter sich perspectiv. Ein Strahlenbüschel und ein perspectives Ebenenbüschel können als Theile einer centrischen Figur erscheinen; in jeder perspectiven Planfigur sind alsdann die entsprechenden Theile ebenfalls unter sich perspectiv.

Wir haben in diesem Paragraphen nirgends von eigentlichen Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) gesprochen und demnach auch keine geometrischen Begriffe angewendet, welche sich bloss auf eigentliche Elemente beziehen. Es sind die Ausdrücke Punkt, Gerade und Ebene nur in ihrem allgemeinen Sinne, ausserdem der Begriff des Aneinanderliegens von zwei Elementen und der Begriff der getrennten Lage von zwei Elementenpaaren vorgekommen (wenn man von den Begriffen absieht, welche aus jenen ohne Zuziehung anderer abgeleitet werden können). Von diesen Begriffen sagt man, dass sie sich auf die Lage beziehen. Sie mussten zwar, den geometrischen Grundbegriffen gegenüber, als abgeleitete eingeführt werden; aber wenn man aus ihnen ohne Zuziehung anderer geometrischer Begriffe weitere ableitet (von denen man ebenfalls sagen wird, dass sie sich auf die Lage beziehen), so kann man innerhalb der auf die Lage bezüglichen Begriffsgruppe jene den übrigen als Stammbegriffe voranstellen. Diejenigen Lehrsätze der Geometrie, welche keine anderen geometrischen Begriffe enthalten, werden als ein besonderer Theil der Geometrie betrachtet,

*) Dabei ist der Fall zweier perspectiven Strahlenbüschel mit inbegriffen, welcher erst später zur Sprache kommt.

welchen man die Geometrie der Lage nennt. Von den bisherigen Sätzen gehören in § 7 die vier letzten, in § 8 die Sätze 1. 2. 4. 5. 7—15, in § 9 alle Ergebnisse ausser dem ersten Satze (Seite 65), in § 10 alle Sätze zur Geometrie der Lage. Punkt, Gerade und Ebene (im allgemeinen Sinne), Aneinanderliegen von Elementen und Getrenntliegen von Paaren spielen in der Geometrie der Lage die Rolle von Stammbegriffen, auf welche alle anderen zurückgeführt werden.

Diejenigen Relationen zwischen den Elementen einer Figur, zu deren Angabe nur auf die Lage bezügliche Begriffe erfordert werden, bilden ihre auf die Lage bezüglichen Eigenschaften und werden auch graphische (descriptive) Eigenschaften der Figur genannt. Die Geometrie der Lage ist demnach die Lehre von den graphischen Eigenschaften der Figuren; sie lehrt, aus graphischen Eigenschaften einer Figur auf andere ebensolche Eigenschaften schliessen. Jeder Satz, bei dessen Beweise nur auf Lage bezügliche Sätze und Begriffe in Anwendung kommen, kann wieder nur einen Zusammenhang zwischen graphischen Eigenschaften behaupten, z. B. jede Folgerung aus den soeben citirten Theoremen. Aber das Umgekehrte ist nicht richtig; die bisherigen Sätze, welche zur Geometrie der Lage gehören, mussten grossentheils aus Sätzen anderer Natur hergeleitet werden, und diese Erscheinung wird sich späterhin noch wiederholen.

Auch die perspective Lage zweier Figuren ist eine graphische Eigenschaft des Systemes. Es werden daher alle bisherigen Bemerkungen über perspective Figuren durch den Satz umfasst: *Wenn eine Planfigur sich in perspectiver Lage mit einer centrischen Figur befindet, so kommt jede graphische Eigenschaft von Elementen der einen Figur auch den homologen Bestandtheilen der andern zu**). Und daraus folgt das wichtige Gesetz, welches die Lehre von den Planfiguren (Planimetrie) mit der Lehre von den centrischen Figuren, soweit es sich nur um Lage handelt, eng verknüpft:

Jeder Satz, welcher von graphischen Eigenschaften einer Planfigur handelt, kann auf centrische Figuren übertragen werden, indem man die Punkte der Planfigur durch Strahlen, ihre Geraden durch Ebenen ersetzt.

---

*) Manche graphische Eigenschaften werden unter Zuziehung von Hülfselementen definirt, z. B. die in § 11 zu besprechende harmonische Lage. Auf solche Eigenschaften kann der obige Satz (und die aus ihm gefolgerten Sätze) nur bezogen werden, insofern die Hülfselemente an der Ebene der Planfigur, beziehungsweise am Scheitel der centrischen Figur liegen.

Ein solcher Satz nämlich lehrt, dass man, so oft in einer Planfigur gewisse graphische Eigenschaften vorausgesetzt werden, auf gewisse andere graphische Eigenschaften zu schliessen berechtigt ist, und es handelt sich darum, das Entsprechende für die centrischen Figuren zu beweisen. Man nimmt also eine centrische Figur mit den Eigenschaften an, welche der Voraussetzung des planimetrischen Satzes entsprechen, und geht zu irgend einer perspectiven Planfigur über. Dieser kommen die analogen Eigenschaften zu, folglich auch diejenigen, welche die Behauptung des planimetrischen Satzes ausmachen, und die Eigenschaften, welche den letzteren entsprechen, besitzt daher auch die centrische Figur. Mit gleichem Rechte werden planimetrische Sätze, welche graphische Eigenschaften betreffen, aus den analogen Sätzen über centrische Figuren ohne besonderen Beweis entnommen. — Hiermit ist das Gesetz ausgesprochen, nach welchem im vorigen Paragraphen die Sätze 1 und 2, 3 und 4 zusammengehören. Wir können noch hinzufügen: *Jede graphische Eigenschaft, welche man für eine gerade Punktreihe oder ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel bewiesen hat, ist auch für die beiden anderen Gebilde gültig.*

Ziehen wir jetzt zwei ebene Schnitte einer und derselben centrischen Figur in Betracht, also zwei mit einer centrischen perspective Figuren in verschiedenen Ebenen (P und P'), welche auch unter sich perspectiv genannt werden. Je zwei Elemente, Punkte oder Geraden, welche an demselben Elemente der centrischen Figur liegen, heissen homolog; je zwei homologe Geraden haben eine Ebene, mithin auch einen (in der Geraden PP' gelegenen) Punkt gemein. Die Gerade PP' ist sich selbst homolog, ebenso ihre Punkte; man sagt von diesen Elementen, sie seien den beiden Figuren entsprechend gemein. Die Verbindungslinien homologer Punkte, sowie die Verbindungsebenen homologer Geraden laufen durch einen Punkt O, das Centrum der Perspectivität. Von den Elementen einer solchen Figur, etwa der in P gelegenen, sagt man auch, sie seien aus dem Punkte O auf die andere Ebene P' nach den homologen projicirt. Man sagt also, dass aus dem Punkte O (dem Projectionscentrum) auf die Ebene P' (die Projectionsebene) der Punkt a nach a' (seiner Projection), die Gerade α nach α' (ihrer Projection) projicirt werde, wenn die Ebene P' von dem (projicirenden) Strahl Oa in a', von der (projicirenden) Ebene $O\alpha$ in α' geschnitten wird. Jede Gerade hat mit ihrer Projection einen Punkt gemein. Die Verbindungslinie zweier Punkte wird nach der der entsprechenden Punkte, der Durchschnittspunkt zweier Geraden nach

dem der entsprechenden Geraden projicirt. Von zwei perspectiven Planfiguren in verschiedenen Ebenen ist hiernach jede eine Projection der anderen; die projicirenden Strahlen und Ebenen bilden eine zu beiden perspective centrische Figur (die projicirende Figur). Jeder Strahl der einen Planfigur wird von der Durchschnittslinie der beiden Ebenen in demselben Punkte getroffen, wie seine Projection.

Perspective Figuren in verschiedenen Ebenen haben alle graphischen Eigenschaften gemein, weil diese durch die projicirende Figur von der einen Planfigur auf die andere übertragen werden; mit anderen Worten: *Die graphischen Eigenschaften einer Planfigur werden durch Projection auf eine andere Ebene nicht geändert.*

Die gerade Punktreihe ist eine specielle ebene Figur, welche mit jeder perspectiven Planfigur in einer Ebene enthalten ist. Je zwei perspective gerade Punktreihen setzen gerade Linien (Träger) in einer Ebene voraus und haben den Durchschnittspunkt ihrer Träger entsprechend gemein. Perspective Punktreihen (in verschiedenen Geraden) sind Schnitte eines bestimmten Strahlenbüschels, also einem Strahlenbüschel perspectiv. Innerhalb einer Ebene wird der Punkt a aus O auf eine Gerade nach a' projicirt, wenn diese dem Strahle Oa in a' begegnet; jede gerade Punktreihe wird nach einer perspectiven Punktreihe projicirt. Die Verbindungslinien homologer Punkte zweier perspectiven Punktreihen laufen im Projectionscentrum zusammen.

Das Strahlenbüschel ist ebenfalls eine specielle ebene Figur; bei seiner Projection auf eine andere Ebene sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist der Scheitel in der Projectionsebene gelegen, mithin sich selbst homolog; dann entstehen perspective Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen, aber mit gleichem Scheitel, welche also zusammen in einer centrischen Figur vorkommen können; solche Strahlenbüschel haben die Durchschnittslinie ihrer Ebenen entsprechend gemein. Oder der Scheitel ist von seiner Projection verschieden, so dass perspective Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen und mit verschiedenen Scheiteln entstehen; dann bilden die Durchschnittspunkte homologer Strahlen eine gerade Punktreihe (den perspectiven Durchschnitt der Büschel), nämlich auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen; die Büschel sind demnach einer und derselben geraden Punktreihe perspectiv. In beiden Fällen aber haben wir es mit Schnitten eines Ebenenbüschels, sei es durch denselben Punkt der Axe oder durch verschiedene Punkte, zu thun (projicirendes Ebenenbüschel).

Den perspectiven Planfiguren stehen perspective centrische Figuren gegenüber. Je zwei centrische Figuren mit verschiedenen

Scheiteln O und O', welche einen ebenen Schnitt gemein haben, also zu einer Planfigur perspectiv liegen, heissen perspectiv. Je zwei Strahlen beider Figuren, welche an demselben Punkte der Planfigur liegen, und je zwei Ebenen, welche an derselben Geraden der Planfigur liegen, heissen homolog; je zwei homologe Strahlen haben einen Punkt, mithin auch eine durch den Strahl OO' gehende Ebene gemein. Der Strahl OO' und jede Ebene durch OO', also alle gemeinschaftlichen Elemente der beiden centrischen Figuren, sind entsprechend gemein. Der Ebene zweier Strahlen der einen Figur entspricht die Ebene der homologen Strahlen, der Durchschnittslinie zweier Ebenen entspricht die der homologen Ebenen. Die Schnittpunkte homologer Strahlen und die Schnittlinien homologer Ebenen bilden eine zu beiden perspective Planfigur (den perspectiven Durchschnitt jener beiden Figuren). *Perspective centrische Figuren mit verschiedenen Scheiteln haben alle graphischen Eigenschaften gemein.*

Als besondere Fälle sind Strahlen- und Ebenenbüschel anzuführen. Zwei Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheiteln O und O' sind als centrische Figuren perspectiv, wenn sie einen perspectiven Durchschnitt besitzen, d. h. wenn die homologen Strahlen sich schneiden und die Schnittpunkte (in einer nicht durch O oder O' gehenden Ebene, mithin) in einer Geraden liegen. Eine Gattung solcher Büschel ist uns bereits begegnet, nämlich perspective Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheiteln und in verschiedenen Ebenen; diese enthalten keinen sich selbst entsprechenden Strahl; die Ebenen homologer Strahlen bilden ein Ebenenbüschel. Als eine neue Gattung treten perspective Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheiteln, aber in einerlei Ebene hinzu; solche können als Theile einer Planfigur vorkommen; der Strahl OO' entspricht sich selbst, ein perspectives Ebenenbüschel ist nicht vorhanden. Es giebt demnach drei Arten perspectiver Strahlenbüschel.

Zwei perspective Ebenenbüschel setzen Axen, welche einander begegnen, voraus und bilden also zusammen eine centrische Figur. Die Ebene der Axen ist entsprechend gemein. Der perspective Durchschnitt ist ein Strahlenbüschel, in dessen Scheitel beide Axen sich durchschneiden. Perspective Ebenenbüschel sind also zu einem Strahlenbüschel perspectiv.

Ausgehend von perspectiven Planfiguren, gelangt man zu einer grossen Anzahl von Theoremen über Planfiguren in einer oder in verschiedenen Ebenen. Wir beschränken uns darauf, die fundamentalsten dieser Sätze hier zu entwickeln. Es stehen ihnen ähnliche

Sätze über centrische Figuren gegenüber, welche leicht nachzubilden sind und nicht besonders aufgeführt werden sollen.

Mit abc, $a'b'c'$ mögen zwei Dreiecke, also Planfiguren bezeichnet werden; weder abc noch $a'b'c'$ sollen in gerader Linie liegen; die Punkte abc bestimmen eine Ebene P, $a'b'c'$ eine Ebene P'. Sobald die Strahlen aa', bb', cc' in einem Punkte O sich schneiden, heissen die Dreiecke perspectiv, gleichviel ob die Ebenen P und P' verschieden sind oder nicht. Die Gegenseiten homologer Ecken sind alsdann homolog; je zwei homologe Seiten schneiden sich; dass die drei Schnittpunkte in einer Geraden liegen, folgt bei verschiedenen Ebenen P und P' daraus, dass sie in zwei Ebenen liegen, und wird sich für den andern Fall bald ergeben. Umgekehrt: Wenn die Ebenen P und P' verschieden sind und die Seitenpaare bc $b'c'$, ca $c'a'$, ab $a'b'$ je in einem Punkte (also auf einer Geraden) sich treffen, so sind die Dreiecke abc, $a'b'c'$ perspectiv. Denn die Strahlen aa', bb', cc' liegen dann paarweise in einer Ebene, ohne einer einzigen Ebene anzugehören, und laufen folglich in einem Punkte O zusammen. Ueberhaupt wenn drei oder mehr Geraden paarweise in einer Ebene liegen, aber nicht alle in einer Ebene, so gehen sie durch einen Punkt; oder: *Wenn drei oder mehr Geraden paarweise sich schneiden, so bilden sie entweder eine Planfigur oder eine centrische Figur.* Beides tritt gleichzeitig ein, wenn sie in einem Strahlenbüschel liegen.

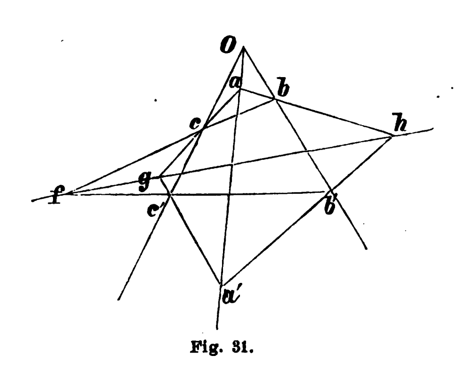


Fig. 31.

Perspective Dreiecke in einer Ebene kommen durch Projection eines Dreiecks aus verschiedenen Punkten zu Stande. Wird in der That das Dreieck ABC (welches die Ebene Q bestimmen mag) auf eine andere Ebene P aus dem Punkte S nach abc, aus S' nach $a'b'c'$ projicirt, so sind die Dreiecke abc, $a'b'c'$ perspectiv. Denn der Durchschnittspunkt O der Ebene P mit der Geraden SS' liegt in der Geraden aa' (nämlich Oaa' in den Ebenen P und ASS'), zugleich in den Geraden bb' und cc'. Umgekehrt: Liegen die Dreiecke abc und $a'b'c'$ in einer Ebene P perspectiv, so sind sie Projectionen eines Dreiecks einer anderen Ebene. Denn zieht man ausserhalb der Ebene P durch den Punkt O, in welchem die Strahlen aa', bb', cc' sich treffen, eine Gerade und nimmt in ihr die

Punkte S und S' beliebig (von O verschieden), so sind die Punkte S' und a' in der Ebene aOS enthalten; folglich schneiden sich die Strahlen Sa und $S'a'$ in einem Punkte A; die Strahlen Sb, $S'b'$ ergeben in gleicher Weise einen Durchschnittspunkt B und Sc, $S'c'$ einen Durchschnittspunkt C. Durch die Punkte A, B, C wird eine von P verschiedene Ebene Q bestimmt, und es wird abc aus S, $a'b'c'$ aus S' auf Q nach ABC projicirt.

Sobald die Dreiecke abc und $a'b'c'$ perspectiv sind, schneiden sich die homologen Seiten auf einer Geraden, gleichviel ob die Dreiecke in einer Ebene liegen oder nicht. Der Beweis braucht nur noch für zwei Dreiecke in einer Ebene geführt zu werden. Solche Dreiecke sind Projectionen eines Dreiecks ABC einer andern Ebene. Die Schnittlinie beider Ebenen wird von der Geraden BC in demselben Punkte getroffen, wie von den Projectionen bc und $b'c'$, etwa in f; ebenso begegnen sich auf jener Schnittlinie CA, ca, $c'a'$ etwa in g und AB, ab, $a'b'$ etwa in h; es schneiden sich also bc $b'c'$, ca $c'a'$, ab $a'b'$ in drei Punkten fgh einer geraden Linie. Umgekehrt: *Wenn in einer Ebene oder in verschiedenen Ebenen Dreiecke abc und $a'b'c'$ so liegen, dass die Seiten bc $b'c'$, ca $c'a'$, ab $a'b'$ sich in Punkten fgh einer Geraden schneiden, so sind die Dreiecke perspectiv.* Auch dies braucht nur noch für Dreiecke in einer Ebene bewiesen zu werden. Durch die Gerade fg lege man eine andere Ebene und projicire auf sie das Dreieck abc nach ABC, so dass die Seite BC durch f, CA durch g, AB durch h hindurchgeht; dann schneiden sich BC und $b'c'$ in f, CA und $c'a'$ in g, AB und $a'b'$ in h, folglich sind ABC und $a'b'c'$ perspective Dreiecke in verschiedenen Ebenen, abc und $a'b'c'$ Projectionen von ABC. (Ein anderer Beweis, welcher für beide Fälle den Satz einfach auf den vorigen zurückführt, hat den Vorzug, für den Fall zweier Dreiecke in einer Ebene sich ganz innerhalb dieser Ebene zu bewegen. Er beruht auf dem Umstande, dass im Punkte h die Strahlen ab $a'b'$ gf zusammentreffen, mithin perspective Dreiecke $aa'g$ und $bb'f$ entstehen; die Seiten dieser Dreiecke $a'g$ $b'f$, ga fb, aa' bb' schneiden sich auf einer Geraden in drei Punkten $c'cO$, d. h. aa' bb' cc' haben den Punkt O gemein.)

Bei Planfiguren, welche aus mehr als drei Punkten bestehen, macht es hinsichtlich der Perspectivität einen wesentlichen Unterschied, ob sie in verschiedenen Ebenen liegen oder nicht. Wir wollen vier Punkte $abcd$ in einer Ebene betrachten; diese werden zu je zweien durch sechs Gerade verbunden, und die Figur, welche aus den Punkten $abcd$ und den sechs Verbindungslinien besteht, wird ein ebenes vollständiges Viereck genannt. Zum vollständigen

Viereck $abcd$ gehören vier Ecken $a\ b\ c\ d$ und sechs Seiten $bc\ ca$ $ab\ ad\ bd\ cd$; bc und ad, ca und bd, ab und cd heissen Gegenseiten. In derselben oder in einer anderen Ebene sei das vollständige Viereck $a'b'c'd'$ so gelegen, dass die Strahlen $aa'\ bb'\ cc'$ dd' in einem Punkte O sich treffen; überdies sollen in keinem der beiden Vierecke drei Ecken sich in einer Geraden befinden. Jene Voraussetzung kann auch dahin formulirt werden, dass die Dreiecke abc und $a'b'c'$, abd und $a'b'd'$ perspectiv sein sollen; durch den Punkt O, in welchem aa' und bb' sich schneiden, laufen dann auch cc' und dd', und es sind auch die Dreiecke bcd und $b'c'd'$, acd und $a'c'd'$ perspectiv. Es ist hiermit eine Zuordnung der Ecken und folglich der Seiten beider Vierecke gegeben, derart, dass je zwei zugeordnete Seiten sich schneiden. Es mögen sich

$$bc\ b'c' \text{ in } f,\ ca\ c'a' \text{ in } g,\ ab\ a'b' \text{ in } h,$$
$$ad\ a'd' \text{ in } f_1,\ bd\ b'd' \text{ in } g_1,\ cd\ c'd' \text{ in } h_1$$

begegnen; die Punkte $ff_1\ gg_1\ hh_1$ liegen je auf zwei Gegenseiten des Vierecks $abcd$ oder $a'b'c'd'$; durch $f_1g_1h_1$, f_1gh, fg_1h, fgh_1 gehen je drei Seiten aus einer Ecke. Wenn die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen, so sind die Punkte $ff_1\ gg_1\ hh_1$ (welche nicht verschieden zu sein brauchen) in einer Geraden enthalten. Dies ist aber nicht nothwendig, wenn die Ebenen beider Figuren zusammenfallen; wir können dann bloss behaupten, dass die Punktgruppen fgh, fg_1h_1, f_1gh_1, f_1g_1h je in einer Geraden liegen, dass also $ff_1\ gg_1\ hh_1$ die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits sind, dessen eine Seite durch fgh hindurchgeht. Ein vollständiges (ebenes) Vierseit ist die aus vier Geraden einer Ebene (den Seiten) und ihren sechs Durchschnittspunkten (den Ecken) zusammengesetzte Figur.

Die obige Voraussetzung ist schon erfüllt, wenn sowohl fgh als $f_1g_1h_1$ in Geraden liegen; es werden also, wenn dies stattfindet, auch fg_1h_1 und f_1gh_1 gerade Punktreihen sein. Fügt man aber noch die Voraussetzung hinzu, dass die durch fgh und f_1g_1h gehenden Geraden zusammenfallen, so werden alle sechs Punkte $ff_1gg_1hh_1$ auch dann in einer Geraden vereinigt, wenn beide Vierecke zu einer Ebene gehören, d. h.: *Wenn die vollständigen Vierecke* $abcd$ *und* $a'b'c'd'$ (keine drei Ecken eines Vierecks sollen in gerader Linie liegen) *in derselben oder in verschiedenen Ebenen so liegen, dass die Seiten* $bc\ b'c'$, $ca\ c'a'$, $ab\ a'b'$, $ad\ a'd'$, $bd\ b'd'$ *sich in Punkten* $fghf_1g_1$ *einer Geraden schneiden, so treffen die Seiten* $cd\ c'd'$ *in einem Punkte* h_1 *derselben Geraden zusammen.* Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass f mit f_1 oder g mit g_1 oder h mit h_1 zusammenfällt.

Wenn in einer Geraden Punkte $ff_1\ gg_1\ h$ (f darf mit f_1, g mit

g_1 zusammenfallen) gegeben sind, so kann man vollständige Vierecke so construiren, dass fünf Seiten durch die gegebenen Punkte gehen und zwar zwei Gegenseiten durch f und f_1, zwei andere durch g und g_1, und dass die durch fgh laufenden Seiten nicht aus einer Ecke kommen; die sechste Seite trifft die gegebene Gerade allemal in einem bestimmten Punkte h_1. In jeder Geraden wird also durch fünf Punkte ff_1 gg_1 h ein sechster Punkt h_1 durch folgende Construction unabhängig von den benutzten Hülfslinien bestimmt. Durch fgh ziehe man drei Geraden, welche sich in abc so treffen, dass bc durch f, ca durch g, ab durch h hindurchgeht; die Geraden af_1 und bg_1 schneiden sich alsdann in einem Punkte d, und die gegebene Gerade wird von cd in h_1 getroffen. Hierbei darf man die Paare ff_1 und gg_1 untereinander, jedoch der Herleitung gemäss f mit f_1 nur dann vertauschen, wenn man gleichzeitig g mit g_1 vertauscht. Thatsächlich ist diese Bedingung überflüssig (§ 16), und man darf, ohne h_1 zu verändern, das Viereck so einrichten, dass die durch fgh gehenden Seiten aus einer Ecke kommen; aber es ist unmöglich, mit den bis jetzt eingeführten Hülfsmitteln den Beweis zu erbringen.

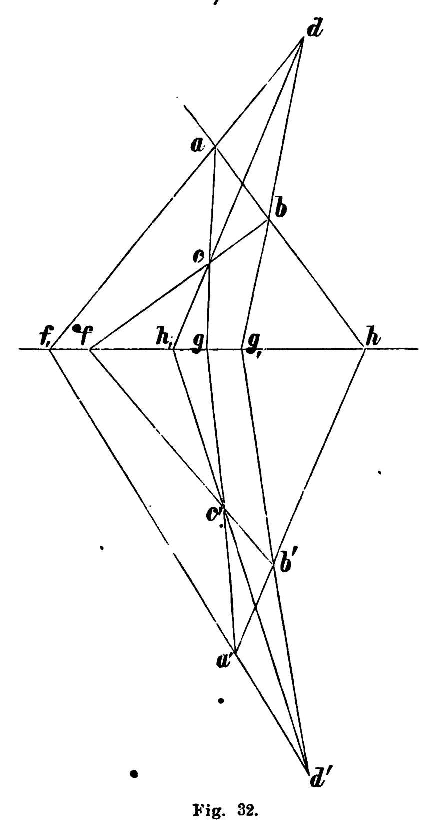


Fig. 32.

Besondere Wichtigkeit besitzt die Figur, in welcher f mit f_1, g mit g_1 zusammenfällt; es schneiden sich dann in f zwei Gegenseiten bc und ad, in g zwei andere Gegenseiten ca und bd, und von den beiden übrigen Seiten ab und cd geht die eine durch h, die andere durch h_1. Sind in einer Geraden drei verschiedene Punkte fgh gegeben, so kann man vollständige Vierecke so construiren, dass zwei Gegenseiten sich in f, zwei andere in g durchkreuzen und eine fünfte Seite durch h hindurchgeht; die gegebene Gerade

wird alsdann von der sechsten Seite in einem bestimmten, von h verschiedenen Punkte h_1 getroffen. Es liefert demnach folgende Construction ein von den benutzten Hülfslinien unabhängiges Resultat (h_1). Durch fgh ziehe man drei Geraden, welche sich in abc so treffen, dass bc durch f, ca durch g, ab durch h geht, und bestimme den Schnittpunkt d der Geraden af und bg, sodann den Schnittpunkt h_1 der Geraden cd mit der gegebenen Geraden. Man darf hierbei f mit g vertauschen. Durch die Punkte fgh_1 wird h in derselben Weise bestimmt, wie h_1 durch fgh.

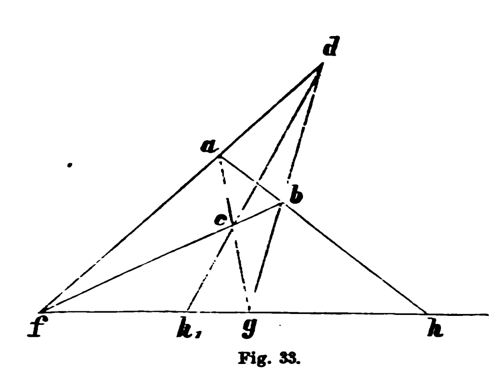


Fig. 33.

§ 11. Harmonische Gebilde.

Wenn zwei (gerade) Punktreihen auf verschiedenen Trägern aus gleichviel Elementen bestehen, und es soll geprüft werden, ob sie sich als perspective Gebilde auffassen lassen, so besteht das erste Erforderniss darin, dass die Träger in einer Ebene enthalten sein und also in einem Punkte k sich schneiden müssen. Ist dies der Fall, und wählt man in der einen Geraden zwei Punkte fg, in der anderen cd beliebig (von k verschieden), so ist sowohl zwischen fg und cd als auch zwischen gf und cd Perspectivität vorhanden; denn die Strahlen cf und dg schneiden sich in einem Punkte b, die Strahlen cg und df in einem Punkte a, und es werden cd aus b nach fg, aus a nach gf projicirt. Wählt man aber in einer Geraden drei Punkte fgh, in einer andern Geraden, welche jener in k (von fgh verschieden) begegnet, drei Punkte cde beliebig (von k verschieden), so ist es durchaus nicht nothwendig, dass fgh und cde in irgend einer Anordnung perspectiv sind. Vielmehr müssen, wenn fgh und cde in dieser Reihenfolge perspectiv, also b das Centrum der Perspectivität sein soll, beh in einer Geraden liegen; sollen gfh und cde perspectiv sein, so müssen aeh in einer Geraden liegen, u. s. w. Wenn zu f und g die Punkte c und d als homologe Punkte gegeben werden, so ist zu jedem Punkte h der fg der homologe Punkt e in cd bestimmt.

Es seien fgh und cde perspective Punktreihen, b das Centrum der Perspectivität, der Punkt k entsprechend gemein; dann ist es

nicht nothwendig, dass *fgh* und *cde* noch in einer andern Anordnung perspectiv sind. Soll es möglich sein, *cde* auch nach *gfh* zu projiciren, so müssen die Strahlen *cg*, *df*, *eh* in einem Punkte *a* sich treffen, d. h. es sind alsdann *abcd* die Ecken eines vollständigen Vierecks, in welchem zwei Gegenseiten sich in *f*, zwei andere in *g* durchkreuzen, während von den beiden übrigen (in *e* sich schneidenden) die eine durch *h*, die andere durch *k* hindurchgeht. Es existiren also, wenn *fgh* in einer Geraden gegeben sind, gerade Punktreihen, welche mit *fgh* und *gfh* zugleich perspectiv liegen; um eine solche Punktreihe *cde* zu erhalten, construirt man irgend ein Dreieck *abc*, dessen Seiten *bc*, *ca*, *ab* resp. durch *f*, *g*, *h* gehen, ferner den Durchschnittspunkt *d* der Strahlen *af* und *bg*, endlich den Durchschnittspunkt *e* der Strahlen *ab* und *cd*. Die Träger aller Punktreihen, welche sich sowohl zu *fgh* als auch zu *gfh* in perspectiver Lage befinden, ohne *h* zu enthalten, schneiden den Träger der gegebenen Punktreihe in einem festen Punkte *k* (§ 10 extr.). Umgekehrt: Geht der Träger einer zu *fgh* perspectiven Punktreihe *cde* durch *k*, so sind auch *gfh* und *cde* perspectiv. Schneiden sich nämlich *cf*, *dg* und *eh* in *b*, *df* und *cg* in *a*, so ist *abcd* ein vollständiges Viereck, von welchem zwei Gegenseiten durch *f*, zwei andere durch *g* und eine fünfte Seite durch *k* läuft. Da nun *h* durch die Punkte *fgk* in derselben Weise bestimmt wird, wie *k* durch *fgh*, so läuft die sechste Seite *ab* durch *h*, folglich *bh* (d. i. *eh*) durch *a*, so dass *cg*, *df* und *eh* in *a* zusammentreffen.

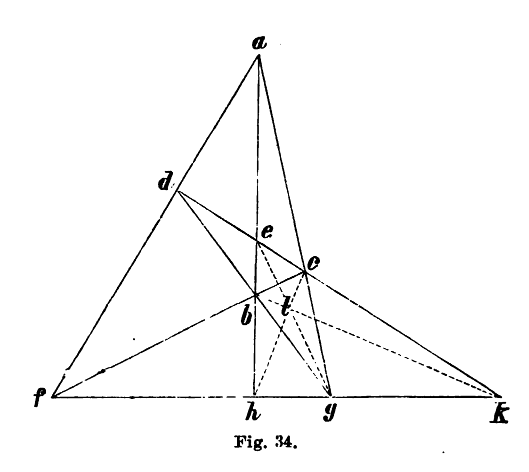


Fig. 34.

Damit eine Projection der geraden Punktreihe fgh, ohne h zu enthalten, zugleich eine Projection von gfh sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass der Träger der Projection mit dem Träger der gegebenen Punktreihe in einem durch die letztere bestimmten Strahlenbündel k liege. Wenn an einem Dreieck *abc* die Seiten *bc*, *ca*, *ab* resp. durch *f*, *g*, *h* gehen, so treffen sich die Strahlen *af*, *bg*, *ck* in einem Punkte *d*.

Wenn die Punkte *cd* aus *b* nach *fg*, aus *a* nach *gf* projicirt

werden, so giebt es in der Geraden fg zwei Punkte hk, welche aus a und b sich nach denselben Punkten der Geraden cd projiciren, und keinen weiteren; von den Punkten hk ist der eine h von seiner Projection e verschieden, hingegen der andere k seine eigene Projection. Durch die Punkte fgh oder gfh (andere Permutationen sind nicht gestattet) ist also k derart bestimmt worden, dass eine Punktreihe $cdek$ als Projection von $fghk$ und von $gfhk$ erscheint. Nun besteht aber zwischen den Punkten $fgkh$ genau derselbe Zusammenhang, wie zwischen den Punkten $fghk$, und es wird also bei jeder Punktreihe, welche, ohne k zu enthalten, nach fgk und nach gfk projicirt werden kann, h sich als seine eigene Projection ergeben. So ist in der That die Punktreihe $abeh$ mit $fgkh$ und zugleich mit $gfkh$ perspectiv, die Projectionscentren sind resp. d und c. *Von dem Paare fg (oder gf) ist demnach das Paar hk (oder kh) durch die Forderung abhängig, dass es möglich sein soll, $fghk$ und $gfhk$ nach einer und derselben Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta$ zu projiciren,* wobei nothwendigerweise entweder k mit δ oder h mit γ zusammenfällt, aber der Schein vermieden wird, als müsse gerade k nach sich selbst projicirt werden. Hält man fg fest, so ordnen sich die übrigen Punkte der Geraden fg zu Paaren hk, derart, dass aus einem Punkte des Paares der andere sich bestimmt. *Die Punkte fg werden allemal durch hk getrennt.* Denn es werden entweder gh durch fk oder hf durch gk oder fg durch hk getrennt, und zwar schliesst jede dieser Lagen die beiden anderen aus; wären nun gh durch fk getrennt, so übertrüge sich dies wegen der Perspectivität auf die Paare $\beta\gamma$ und $\alpha\delta$ und von da wieder auf die Paare fh und gk; ebenso würde die getrennte Lage von hf und gk noch die von gh und fk bedingen. Man sagt in Rücksicht auf die getrennte Lage der Paare fg und hk, dass fg durch hk harmonisch getrennt werden. Aber *es werden auch hk durch fg harmonisch getrennt.* Denn am Dreieck cbe gehen die Seiten be, ec, cb resp. durch h, k, f, während die Strahlen ch, bk, eg in einem Punkte l sich treffen; es sind nämlich die Dreiecke cbg und hke perspectiv, weil bg ke, gc eh, cb hk sich in drei Punkten daf einer Geraden schneiden. *Dagegen werden gh durch fk, hf durch gk* **nicht** *harmonisch getrennt* u. s. w.

Man nennt die Punkte $fghk$ harmonische Punkte (eine harmonische Punktreihe, ein harmonisches Gebilde in einer Geraden), f und g conjugirt, ebenso h und k; zwei conjugirte Punkte bilden ein Paar. Man darf die beiden Paare mit einander vertauschen, ebenso in jedem Paare die beiden conjugirten Elemente. Wenn also von den acht Anordnungen

$fghk \quad gfhk \quad fgkh \quad gfkh$
$hkfg \quad hkgf \quad khfg. \quad khgf$

eine harmonisch ist, so sind es auch die übrigen; aber keine andere Anordnung derselben vier Punkte ist alsdann harmonisch. Zu drei beliebigen Punkten fgh in einer Geraden kann ein und nur ein vierter Punkt k derselben Geraden so construirt werden, dass $fghk$ harmonisch sind; man nennt k den vierten harmonischen Punkt zu den gegebenen Punkten fgh (oder gfh), welche so angeordnet werden, dass zuerst zwei conjugirte stehen und zuletzt derjenige, dessen conjugirter fehlt. Um zu fgh den vierten harmonischen Punkt k zu construiren, zieht man durch h eine beliebige Gerade und nimmt in ihr zwei beliebige Punkte ab; diese werden aus einem Punkte d nach fg, aus einem Punkte c nach gf projicirt; der Strahl cd bestimmt in fg den Punkt k. Die Geraden cf fa ac bd sind die Seiten eines vollständigen Vierseits, an welchem acf drei Ecken sind, deren Gegenecken bdg von den Seiten des Dreiecks acf aus der Geraden bd ausgeschnitten werden. Die Geraden ab cd fg, welche je zwei Gegenecken verbinden, heissen die Diagonalen oder Nebenseiten des vollständigen Vierseits. *In der Diagonale fg liegen zwei Gegenecken des vollständigen Vierseits, f und g, ausserdem zwei Durchschnittspunkte mit den beiden anderen Diagonalen, h und k; solche vier Punkte sind allemal harmonisch.*

Um zu erkennen, ob das gerade Gebilde $fghk$ harmonisch ist, wird ein perspectives gerades Gebilde $\alpha\beta\gamma\delta$ zu Hülfe genommen, in welchem α mit f zusammenfällt oder β mit g u. s. w. Es mag δ mit k zusammenfallen; alsdann müssen, wenn $fghk$ harmonische Punkte sind, auch die Gebilde $gfhk$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ sich in perspectiver Lage befinden. Daraus wird zunächst die harmonische Lage auch der Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ erkannt. Um dies auf beliebige perspective Punktreihen $fghk$ und $f'g'h'k'$, von denen die erstere harmonisch ist, zu übertragen, braucht nur noch der Fall geprüft zu werden, wo weder f' in f fällt, noch g' in g u. s. w. Die Punkte h' und k sind alsdann vo einander verschieden, und die Gerade $h'k$ wird von den in einem Punkte zusammenstossenden Strahlen ff' gg' hh' kk' in $\alpha\beta\gamma\delta$ so geschnitten, dass γ mit h', δ mit k identisch ist; es werden $\alpha\beta\gamma\delta$ harmonisch, folglich auch $f'g'h'k'$.

Ist von zwei perspectiven geraden Punktreihen die eine harmonisch, so ist es auch die andere. Oder: Jede Projection einer harmonischen Punktreihe ist wieder harmonisch.

Wenn in einer Planfigur eine Punktreihe harmonisch ist, so hat man darin eine graphische Eigenschaft der Planfigur zu erblicken. Bei der Definition harmonischer Punkte werden freilich

diese Punkte nicht unter sich allein durch graphische Begriffe in Beziehung gesetzt, sondern es müssen noch andere Elemente zu Hülfe genommen werden, und es brauchen die zur Prüfung der Punktreihe zugezogenen fremden Elemente nicht in der Ebene jener Planfigur zu liegen. Aber die bei der Wahl dieser Elemente gestattete Willkür lässt sich benutzen, um die Prüfung der Punktreihe in irgend einer sie verbindenden Ebene, also insbesondere in der Ebene der betrachteten Planfigur zu bewirken. Gehen wir daher zu einer perspectiven centrischen Figur über, so dass der Punktreihe ein Strahlenbüschel entspricht, so wird die an der Punktreihe bemerkte Eigenschaft nach dem in § 10 ausgesprochenen Gesetz auf das Strahlenbüschel übertragen, und es wird angemessen sein, für die centrische Figur analoge Definitionen zu geben.

Demgemäss nennt man vier Strahlen $fghk$ in einem Büschel harmonisch, ein harmonisches Strahlenbüschel, wenn ein concentrisches Strahlenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ existirt, welches zu $fghk$ perspectiv ist und zugleich entweder zu $gfhk$ oder zu $fgkh$. Die Strahlen f und g heissen conjugirt, ebenso h und k; zwei conjugirte Strahlen bilden ein Paar; die beiden Paare liegen getrennt. Die Sätze über harmonische Punkte dürfen wir ohne Weiteres auf harmonische Strahlen übertragen. Man darf also in jedem harmonischen Strahlenbüschel $fghk$ die beiden Paare mit einander vertauschen, ebenso in jedem Paare die conjugirten Elemente, aber jede andere Vertauschung hebt die harmonische Lage auf. Sind die Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ eines Büschels zu den Strahlen $fghk$ eines concentrischen Büschels und zu $gfhk$ perspectiv, so fällt entweder γ in h oder δ in k. Werden vier harmonische Strahlen $fghk$ nach den mit ihnen concentrischen Strahlen $\alpha\beta\gamma k$ projicirt, so sind auch $gfhk$ und $\alpha\beta\gamma k$ perspectiv. Ist von zwei perspectiven concentrischen Strahlenbüscheln das eine harmonisch, so ist es auch das andere. U. s. w.

Wenn ein Strahlenbüschel und eine gerade Punktreihe sich in perspectiver Lage befinden, so kann man jenes als eine centrische Figur, diese in einer den Scheitel des Büschels ausschliessenden Ebene als perspective Planfigur betrachten. Die Prüfung, ob ein Strahlenbüschel harmonisch ist, bewegt sich innerhalb einer centrischen Figur, zu welcher das Strahlenbüschel gehört; die Prüfung, ob eine Punktreihe harmonisch ist, kann man in jeder ihrer Ebenen vollziehen. Die harmonische Lage ist demnach eine Eigenschaft, welche sich im Falle der Perspectivität vom Strahlenbüschel auf die Punktreihe und umgekehrt überträgt. *Befindet sich ein Strahlenbüschel mit einer Punktreihe in perspectiver Lage und ist das eine*

Gebilde harmonisch, so ist es auch das andere. Jeder Schnitt eines harmonischen Strahlenbüschels ist harmonisch; jedes Strahlenbüschel, welches eine harmonische Punktreihe projicirt, ist harmonisch.

Hieraus folgt, dass wenn zwei Strahlenbüschel mit einer und derselben Punktreihe perspectiv liegen und das eine harmonisch ist, auch das andere diese Eigenschaft besitzt. Wir können also jetzt für alle Gattungen perspectiver Strahlenbüschel den Satz aussprechen: *Ist von zwei perspectiven Strahlenbüscheln das eine harmonisch, so ist es auch das andere.* Jede Projection eines harmonischen Strahlenbüschels ist demnach wieder harmonisch. Ist von einem Ebenenbüschel irgend ein Schnitt (Punktreihe oder Strahlenbüschel) harmonisch, so ist es jeder.

Ueberhaupt: *Wenn von zwei perspectiven ebenen Gebilden das eine harmonisch ist, so ist es auch das andere.*

Wenn in einer Planfigur ein Strahlenbüschel harmonisch ist, so kann man diese Eigenschaft nach der oben gegebenen Definition nicht darstellen, ohne aus der Ebene der Planfigur herauszutreten. Zu einer anderen Definition, welche keine Elemente ausserhalb der Ebene des Büschels benutzt, gelangt man folgendermassen. Von einem harmonischen Strahlenbüschel sei a der Scheitel, $fghk$ ein Schnitt, also eine harmonische Punktreihe. Im Strahl ah nehme ich den Punkt b beliebig; ab mögen nach fg aus d, nach gf aus c projicirt werden. Wegen des Zusammenhanges zwischen dem vollständigen Viereck $abcd$ und den Punkten fgh geht die Seite cd durch k; der Schnittpunkt der Seiten ab und cd mag mit e bezeichnet werden. Bezeichnet man, wie üblich, Strahlen eines Büschels, wenn etwa a der Scheitel ist und die Strahlen resp. durch $fgh\ldots$ hindurchgehen, kurz mit $a(fgh\ldots)$, so sind $a(fghk)$ und $b(fghk)$ perspectiv, ebenso $a(cdek)$ und $b(cdek)$, d. i. $a(gfhk)$ und $b(fghk)$. Umgekehrt: Liegen in einer Ebene zwei perspective Strahlenbüschel $a(fghk)$ und $b(fghk)$, und sind auch $a(gfhk)$ und $b(fghk)$ perspectiv, so sind $a(fghk)$ harmonisch. Denn wenn die Strahlen ag und bf in c, af und bg in d sich treffen, so liegt der perspective Durchschnitt der Büschel $a(gfhk)$ und $b(fghk)$ auf der Geraden cd, auf welcher mithin ah und bh, ak und bk sich begegnen müssen. Von den Strahlen ah und ak ist sicher einer von ab verschieden, etwa ak, also ak von bk verschieden, k in cd, aber h nicht in cd, mithin abh in einer Geraden, $fghk$ harmonisch, ebenso die Strahlen $a(fghk)$.

Ein harmonisches Strahlenbüschel $fghk$ können wir demnach auch als ein solches definiren, welches zu einem in derselben Ebene

enthaltenen Strahlenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ perspectiv ist und ausserdem entweder zu $\beta\alpha\gamma\delta$ oder zu $\alpha\beta\delta\gamma$.

Wenn die Strahlen fg eines Büschels mit den Strahlen $\alpha\beta$ eines andern Büschels perspectiv liegen und zugleich mit $\beta\alpha$, so schneiden sich $fg\alpha\beta$ zu je zweien und liegen demnach entweder in einem Bündel oder in einer Ebene. Ich kann also die obigen Erklärungen in die folgende zusammenfassen: Ein Strahlenbüschel $fghk$ wird harmonisch genannt, wenn es zu einem andern Strahlenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ perspectiv liegt und und zugleich zu $\beta\alpha\gamma\delta$ oder zu $\alpha\beta\delta\gamma$.

Sind die Strahlenbüschel $fghk$ und $gfhk$ mit dem Strahlenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ perspectiv, so fällt entweder h mit γ zusammen oder k mit δ. Sind die Strahlenbüschel fgh und gfh mit $\alpha\beta\gamma$ perspectiv, h von γ verschieden, so haben sie einen Strahl k gemein, und es sind $fghk$ harmonisch. Sind die Strahlen $fghk$ harmonisch und mit den Strahlen $\alpha\beta\gamma k$ perspectiv, so sind auch $fghk$ und $\beta\alpha\gamma k$ perspectiv.

Wir gehen jetzt zum Ebenenbüschel über. Vier Ebenen $fghk$ in einem Büschel werden harmonisch genannt, wenn sie zu einem Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ perspectiv liegen und ausserdem entweder zu $\beta\alpha\gamma\delta$ oder zu $\alpha\beta\delta\gamma$. Da perspective Ebenenbüschel eine centrische Figur bilden, so ergiebt sich die Möglichkeit des harmonischen Ebenenbüschels aus der des harmonischen Strahlenbüschels, wie jeder graphische Satz über centrische Figuren aus dem entsprechenden über Planfiguren. Es sei O der Scheitel des Ebenenbündels $fghk\alpha\beta\gamma\delta$, O_1 ein beliebiger anderer Punkt in der Axe des Büschels $fghk$, $f'g'h'k'\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ der Schnitt jenes Bündels mit einer die Punkte O und O_1 ausschliessenden Ebene, und aus O_1 seien an die Strahlen $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ die Ebenen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ gelegt. Dann sind $f'g'h'k'$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ zwei Strahlenbüschel, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ ein Ebenenbüschel; $f'g'h'k'$ liegen zu $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ perspectiv und ausserdem entweder zu $\beta'\alpha'\gamma'\delta'$ oder zu $\alpha'\beta'\delta'\gamma'$; folglich liegen $fghk$ zu $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ perspectiv und zugleich zu $\beta_1\alpha_1\gamma_1\delta_1$ oder zu $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$. Die Eigenschaft des Ebenenbüschels $fghk$, dass es harmonisch ist, kann hiernach dargestellt werden unter Zuziehung von Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt der Axe gehen.

In dem harmonischen Ebenenbüschel $fghk$ heissen f und g conjugirt, ebenso h und k; es werden fg durch hk getrennt, u. s. w. Man kann harmonische Ebenen als diejenigen definiren, welche in harmonischen Strahlen geschnitten werden.

Befinden sich zwei Ebenenbüschel in perspectiver Lage und ist das eine harmonisch, so ist es auch das andere; denn der perspective Durchschnitt ist dann zu beiden harmonisch. Befindet sich

endlich eine Punktreihe mit einem Ebenenbüschel in perspectiver Lage und ist das eine Gebilde harmonisch, so ist es auch das andere.

Diese Bemerkungen und die dazu gehörigen früheren lassen sich jetzt zu einem Satze vereinigen: *Wenn von zwei perspectiven Gebilden das eine harmonisch ist, so ist es auch das andere.* Aber die Aufstellung eines Satzes, welcher bei aller Kürze des Ausdrucks so viele einzelne und verschiedenartige Erscheinungen umfasst, setzt bezüglich der Begriffsbildung die entsprechende Zweckmässigkeit und Allgemeinheit voraus. Es wäre schwerlich gelungen, diese Eigenschaften bei den Begriffen der Perspectivität und der harmonischen Lage zu erzielen, wenn man sich auf diejenige Terminologie beschränkt hätte, bei welcher zweien Geraden in einer Ebene nicht nothwendig ein Durchschnittspunkt, zweien Ebenen nicht nothwendig eine Durchschnittslinie zukommt. —

Zu späterer Anwendung werden hier noch folgende Sätze abgeleitet.

Wenn die Punkte fg sowohl durch hk als durch uv harmonisch getrennt werden, so kann man von den Punkten $fgku$ durch wiederholte Projection zu den Punkten $fghv$ gelangen. Beweis: Man kann ein vollständiges Viereck $abcd$ derart construiren, dass ad und bc in f, bd und ac in g sich schneiden, ab durch h, cd durch k hindurchgeht. Wird bv von df in a', ga' von bf in c' getroffen, so geht dc' durch u. Also werden $fgku$ aus d auf bc nach $fbcc'$, diese aus g auf ad nach $fdaa'$, diese aus b auf fg nach $fghv$ projicirt.

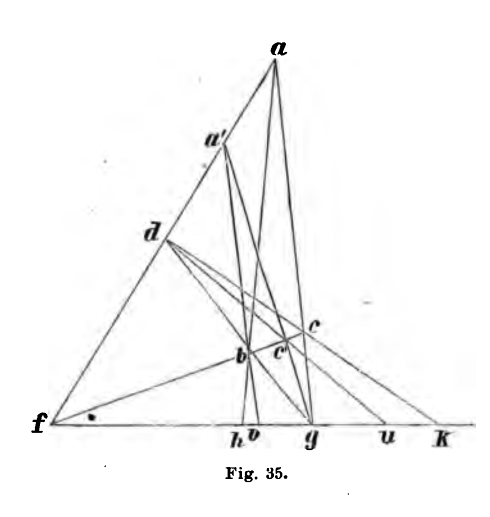


Fig. 35.

Sind demnach $fghk$ und $fguv$ harmonische Gebilde, fk durch gu getrennt, so sind fh durch gv getrennt.

Sind $fghk$ und $fguv$ harmonische Gebilde, so werden hk durch uv nicht getrennt. Beweis: Da fg durch uv getrennt werden, so werden fg auch durch eines der Paare ku oder kv getrennt, etwa durch kv; es sind dann fg durch ku nicht getrennt, sondern etwa fk durch gu. Also sind nach dem vorigen Satze gv auch durch fh getrennt, aber nicht durch fu, folglich gv durch hu. Hiernach

hat man uv durch fg getrennt, aber nicht durch hg, folglich uv durch fh, ferner fk durch gu getrennt, aber nicht durch gh, folglich fk durch hu; endlich hu durch fk getrennt, aber nicht durch fv, folglich hu durch kv, hk nicht durch uv.

Es seien abc drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, ABC ihre Verbindungslinien $bc\ ca\ ab$, e ein Punkt der Ebene abc ausserhalb der Geraden ABC, endlich E eine Gerade der Ebene abc ausserhalb der Büschel abc. Die Strahlen A, B, C geben resp. mit den Strahlen ae, be, ce drei Durchschnittspunkte e_1, e_2, e_3; die Punkte a, b, c geben resp. mit den Punkten AE, BE, CE drei Verbindungslinien E_1, E_2, E_3. Da die Dreiecke abc und $e_1e_2e_3$ perspectiv werden, so schneiden sich die Strahlen A und e_2e_3, B und e_3e_1, C und e_1e_2 in drei Punkten ε_1, ε_2, ε_3 auf einer Geraden; diese Gerade heisst die Polare (auch Harmonikale) des Punktes e für das Dreiseit ABC oder für das Dreieck abc. Da die Punktreihen $bce_1\varepsilon_1$, $cae_2\varepsilon_2$, $abe_3\varepsilon_3$ harmonisch sind, so *geht die Polare von e für ABC durch die vierten harmonischen Punkte zu bce_1, cae_2, abe_3*. Ebenso liegen die Dreiseite ABC und $E_1E_2E_3$ perspectiv, die Verbindungslinien der Punkte a und E_2E_3, b und E_3E_1, c und E_1E_2 laufen durch einen Punkt, welcher als der Pol der Geraden E für das Dreieck abc oder für das Dreiseit ABC bezeichnet wird; *durch den Pol von E für abc gehen die vierten harmonischen Strahlen zu BCE_1, CAE_2, ABE_3*. Werden die Punkte abc mit resp. $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ durch die Strahlen $E'E''E'''$ verbunden, so ist, da die Punkte $cb\varepsilon_1e_1$ harmonisch liegen, ae der vierte harmonische Strahl zu BCE', ebenso be zu CAE'', ce zu ABE'', also e der Pol der Geraden $\varepsilon_1\varepsilon_2$, d. h. *der Punkt e ist allemal der Pol seiner Polare*. Ebenso *ist die Gerade E allemal die Polare ihres Poles.*

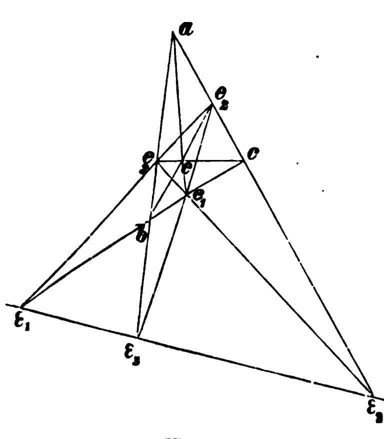


Fig. 36.

Es seien ABC drei Ebenen, welche nicht in einem Büschel liegen, abc ihre Durchschnittslinien $BC\ CA\ AB$, E eine Ebene des Bündels ABC ausserhalb der Büschel abc, endlich e eine Gerade des Bündels ABC ausserhalb der Ebenen ABC. Die Strahlen a, b, c geben resp. mit den Strahlen AE, BE, CE drei Ebe-

nen E_1, E_2, E_3; die Ebenen A, B, C geben resp. mit den Ebenen ae, be, ce drei Durchschnittslinien e_1, e_2, e_3. Dann gehen die Verbindungsebenen der Strahlen a und E_2E_3, b und E_3E_1, c und E_1E_2 durch eine Gerade, welche die Polare (Harmonikale) der Ebene E für das Strahlentripel abc oder für das Ebenentripel ABC genannt wird, und die Durchschnittslinien der Ebenen A und e_2e_3, B und e_3e_1, C und e_1e_2 fallen in eine Ebene, welche die Polare (Harmonikalebene) des Strahles e für das Ebenentripel ABC oder für das Strahlentripel abc heisst. *Die Polare von E für abc liegt in den vierten harmonischen Ebenen zu BCE_1, CAE_2, ABE_3; die Polare von e für ABC enthält die vierten harmonischen Strahlen zu bce_1, cae_2, abe_3. Die Ebene E ist die Polarebene ihres Polarstrahles; der Strahl e ist der Polarstrahl seiner Polarebene.*

Endlich seien $abcd$ vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, $ABCD$ ihre Verbindungsebenen bcd cda dab abc, e ein Punkt ausserhalb der Ebenen $ABCD$, E eine Ebene ausserhalb der Bündel $abcd$. Die Ebenen A, B, C, D geben resp. mit den Strahlen ae, be, ce, de vier Durchschnittspunkte e_1, e_2, e_3, e_4; die Punkte a, b, c, d geben resp. mit den Strahlen AE, BE, CE, DE vier Verbindungsebenen E_1, E_2, E_3, E_4. Wenn die Ebene abe die Gerade cd im Punkte e_{12}, die Ebene ace die Gerade bd im Punkte e_{13} u. s. w. schneidet, so treffen sich die Strahlen $e_{14}e_{23}$, $e_{24}e_{31}$, $e_{34}e_{12}$ in e, folglich die Strahlen $e_{13}e_{14}$ (in der Ebene bcd) und $e_{23}e_{24}$ (in der Ebene acd) auf der Geraden cd in einem Punkte ε_{12}, die Strahlen $e_{12}e_{14}$ und $e_{23}e_{34}$ auf der Geraden bd in einem Punkte ε_{13} u. s. w.; in der Ebene A werden die Punkte $\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{14}$ durch die Polare von e_1 für bcd verbunden, in der Ebene B die Punkte $\varepsilon_{23}\varepsilon_{24}\varepsilon_{12}$ durch die Polare von e_2 für cda u. s. w. Folglich liegen die Punkte $\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{14}\varepsilon_{23}\varepsilon_{24}\varepsilon_{34}$ auf einer Ebene, welche die Polare (Harmonikalebene) des Punktes e für das Ebenenquadrupel $ABCD$ oder für das Punktquadrupel $abcd$ genannt wird. *Die Polarebene von e für $ABCD$ enthält die Polargeraden von e_1, e_2, e_3, e_4 resp. für bcd, cda, dab, abc.* Ebenso gehen die Polarstrahlen von E_1, E_2, E_3, E_4 resp. für BCD, CDA, DAB, ABC durch einen Punkt, welcher der Pol der Ebene E für das Punktquadrupel $abcd$ oder für das Ebenenquadrupel $ABCD$ heisst. Für bcd ist e_1 der Pol der Geraden $\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}$, folglich ist ae für BCD der Polarstrahl der Ebene $a\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}$, ebenso be für CDA der Polarstrahl der Ebene $b\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}$ u. s. w., d. h. *der Punkt e ist der Pol seiner Polarebene.* Ebenso *ist die Ebene E die Polare ihres Poles.*

§ 12. Von der Reciprocität.

Es ist jetzt an der Zeit, auf die zwischen graphischen Sätzen bestehenden Zusammenhänge näher einzugehen, welche zuerst in § 9 wahrgenommen werden konnten. Die eine Art der Zusammengehörigkeit wurde in § 10 begründet und in § 11 bereits benutzt; sie gestattete uns, die Sätze über centrische Figuren aus den planimetrischen herzustellen und zwar derart, dass sich die Punkte in Geraden, die Geraden in Ebenen verwandeln. Die Sätze 1. 2. in § 9 einerseits und 3. 4. in § 9 andererseits boten die ersten Beispiele einer solchen Uebertragung. Es findet aber noch eine wesentlich andere Zusammengehörigkeit statt, welche sich überdies nicht bloss auf jene speciellen Figuren beschränkt. Man braucht nur den Sätzen 1, 2, a, b in § 9 die Sätze 4, 3, d, c in § 9 gegenüberzustellen, um wahrzunehmen, wie die erste Gruppe durch eine sehr einfache Aenderung in die zweite übergeht, nämlich indem man die Elemente „Punkt“ und „Ebene“ durchweg mit einander vertauscht.

Diese Wahrnehmung erstreckt sich auf den gesammten Inhalt der Geometrie der Lage; man darf — wie sich zeigen wird — in jedem graphischen Satze die Worte „Punkt“ und „Ebene“ mit einander vertauschen, vorausgesetzt, dass man auch die dadurch bedingten weiteren Vertauschungen vornimmt. Führt man diese Vertauschungen an irgend einem graphischen Satze aus, so erhält man einen (im Allgemeinen) andern Satz, der ebenfalls richtig ist; wendet man sie aber auf den zweiten Satz an, so wird man zum ersten zurückgeführt. Man sagt deshalb, es finde in der Geometrie der Lage eine Reciprocität oder Dualität statt zwischen den Punkten und Ebenen, und stellt jedem graphischen Begriffe einen reciproken oder dualen Begriff gegenüber. Dabei ist jeder Begriff der reciproke seines reciproken. „Punkt“ und „Ebene“, „gerade Punktreihe“ (Punkte an einer Geraden) und „Ebenenbüschel“ (Ebenen an einer Geraden), „Punkte an einer Ebene“ und „Ebenen eines Bündels“, „Strahlen eines Bündels“ und „Strahlen an einer Ebene“, „Verbindungslinie zweier Punkte“ und „Durchschnittslinie zweier Ebenen“, „centrische Figur“ und „Planfigur“ sind reciproke Begriffe. Die „Gerade“, das „Aneinanderliegen“, die „getrennte Lage“ von Elementenpaaren, das „Strahlenbüschel“ (Strahlen, welche an einer Ebene und an einem Punkte liegen) sind sich selbst reciprok, d. h. sie werden von jener Vertauschung nicht betroffen. Jeder Figur entspricht eine reciproke. Besteht zwischen zwei Figuren Perspectivität, wie wir sie in § 10 beschrieben haben, so folgt a[illegible]

den dort gegebenen Erklärungen, dass allemal auch die reciproken Figuren perspectiv sind. Wir werden in Folge dessen, wenn wir die in § 11 aufgestellten Definitionen prüfen, harmonische Punkte und harmonische Ebenen für reciproke Gebilde und harmonische Strahlen für ein sich selbst reciprokes Gebilde erklären. Oder wir sagen einfach: die Begriffe „perspectiv“ und „harmonisch“ sind sich selbst reciprok.

Werden nun in einem graphischen Satze alle geometrischen Begriffe durch die reciproken ersetzt, so entsteht der reciproke oder duale Satz. Jeder Satz ist der reciproke seines reciproken. Manche Sätze sind sich selbst reciprok, z. B. der Satz: „Ist von zwei perspectiven Strahlenbüscheln das eine harmonisch, so ist es auch das andere“.

Die Kenntniss der Dualität in der Geometrie der Lage ist deshalb von grossem Nutzen, weil sie die Berechtigung gewährt, nach jedem für richtig erkannten Theoreme, welches nicht sich selbst reciprok ist, sofort ein anderes Theorem auszusprechen, nämlich das reciproke, für welches alsdann kein Beweis erforderlich ist. In der That wird man, sobald erst die Dualität als ein allgemeines Gesetz nachgewiesen ist, in jedem einzelnen Falle den reciproken Satz ohne Weiteres anerkennen müssen. Aber obschon eine aufmerksame Durchsicht der bisher aufgestellten graphischen Theoreme hinreicht, um jenes Gesetz für diese zu bestätigen, so verfügen wir doch augenblicklich noch nicht vollständig über die geeigneten Mittel, um es zu seiner Allgemeinheit zu erheben, und wir müssen uns also jetzt damit begnügen, die Reciprocität zwischen Punkt und Ebene mit einer gewissen Einschränkung zu begründen.

Graphische Sätze wurden zuerst in § 7 bewiesen; es folgten in § 8 und § 9 fast ausschliesslich ebensolche Sätze. Von da an trugen die Entwickelungen einen ganz bestimmten Charakter; es wurden nicht mehr andere Sätze hergeleitet als graphische, und es wurden auch bei der Herleitung keine Sätze anderer Art benutzt. Die §§ 10 und 11 enthielten also graphische Geometrie mit rein graphischen Hülfsmitteln, welche zuvor in §§ 7, 8, 9 angesammelt worden waren. Diese Hülfsmittel sind nicht unabhängig von einander. Allein das ist für unsern Zweck gleichgültig; wir brauchen bloss festzuhalten, dass man keiner anderen Sätze bedarf, um die Geometrie der Lage, soweit sie uns jetzt zugänglich ist, auszubauen. Dass in der That alle graphischen Theoreme, welche wir ohne Aufstellung neuer Grundsätze beweisen könnten, sich aus jenen Sätzen herleiten lassen, wird durch folgende Ueberlegung erkannt.

Wie aus § 9 (Anfang) zu entnehmen, lässt sich jedes Theorem, welches auf unserm gegenwärtigen Standpunkte überhaupt erreichbar ist, aus den graphischen Sätzen der §§ 7, 8, 9 in Verbindung mit den Sätzen 6. 7. 8. 9. 12. des § 1, dem Satze 10. des § 2 und den Sätzen 3. 6. des § 8 deduciren. Wenn eigentliche Elemente weder im Theoreme selbst vorkommen noch beim Beweise zu Hülfe genommen werden, so wird der Beweis mit jenen graphischen Sätzen allein geführt; die anderen Sätze können nicht gebraucht werden, so lange keine eigentlichen Elemente auftreten. Wir wollen diese beiden Satzgruppen hier als die „erste" und „zweite" unterscheiden. Wenn man in den Sätzen der zweiten Gruppe überall, wo von eigentlichen Punkten in einer Geraden die Rede ist und von dem einen gesagt wird, dass er zwischen zwei anderen liegt oder nicht, die Worte „bei ausgeschlossener Ebene N" hinzufügt und sodann die eigentlichen Elemente überall durch beliebige ersetzt, so erhält man graphische Sätze, welche vollkommen richtig sind und sich in der ersten Gruppe aufgeführt finden.

Handelt es sich um ein graphisches Theorem, so kommen eigentliche Elemente im Theoreme selbst nicht vor. Es können also beim Beweise die Sätze der zweiten Gruppe nur dann eine Rolle spielen, wenn eigentliche Elemente beim Beweise zu Hülfe genommen werden. Ist dies der Fall, so füge man in dem Beweise überall, wo von drei eigentlichen Punkten in einer Geraden die Rede ist und von dem einen gesagt wird, dass er zwischen zwei anderen liegt oder nicht, die Worte „bei ausgeschlossener Ebene N" hinzu, ersetze sodann die eigentlichen Elemente überall durch beliebige und nehme endlich statt auf die Sätze der zweiten Gruppe auf die entsprechenden Sätze der ersten Gruppe Bezug. Der so veränderte Beweis hat volle Gültigkeit; aber er ist von den Sätzen der zweiten Gruppe durchaus unabhängig, und man kann demnach jedes graphische Theorem, welches sich aus den beiden Gruppen herleiten lässt, schon mit Hülfe der ersten Gruppe beweisen.

Die Geometrie der Lage muss sich also darauf beschränken, aus den graphischen Sätzen der §§ 7, 8, 9 Folgerungen zu ziehen, bis eine Vermehrung ihres Stoffes durch das Hinzutreten neuer Grundsätze möglich wird.

Es hat jetzt keine Schwierigkeit, die Reciprocität zwischen Punkt und Fbene für die Geometrie der Lage, soweit sie aus den bisherigen Grundsätzen sich entwickeln lässt, zu begründen. Das Gesetz der Reciprocität wird zunächst für die graphischen Sätze der

§§ 7, 8, 9 als richtig erkannt, da der reciproke Satz eines jeden ebenfalls zu dieser Gruppe gehört. Jeder andere Satz, der in Betracht kommen kann, ist eine Folgerung aus diesen Sätzen. Bei seinem Ausspruche und beim Beweise werden nur graphische Begriffe verwendet. Dabei kann man sich auf die Stammbegriffe beschränken; die übrigen sind aus den Stammbegriffen abgeleitet und können mit Hülfe der betreffenden Definitionen herausgeschafft werden. Jenes Theorem ist also das Ergebniss einer Betrachtung, in welcher nur die graphischen Stammbegriffe vorkommen und nur auf die oben bezeichneten graphischen Sätze Bezug genommen wird. Wenn man in dieser Betrachtung durchweg das Wort „Punkt“ durch „Ebene“, „Ebene“ durch „Punkt“ und die benutzten Lehrsätze durch die reciproken ersetzt, so bleibt ihre Richtigkeit ungemindert; aber in ihrem Ergebniss findet man „Punkt“ und „Ebene“ mit einander vertauscht, d. h. man hat das reciproke Theorem bewiesen.

Das Gesetz der Reciprocität zwischen Punkt und Ebene ist hiernach wenigstens in den angedeuteten Grenzen gültig, muss aber später von Neuem geprüft werden.

Kommen wir jetzt noch einmal auf die Sätze des § 9 zurück. Es erübrigt noch, die Beziehungen zwischen den Sätzen 1 und 3, 2 und 4 zu untersuchen. Die ersteren handeln von Planfiguren, die letzteren von centrischen Figuren. Dem entsprechend wird auch die folgende Betrachtung zu Uebertragungsgesetzen führen, welche ebene Figuren wieder in ebene, centrische in centrische verwandeln und auf andere Figuren überhaupt keine Anwendung finden.

Die Sätze 1. und 3. des § 9 gehen in einander über, wenn man die Elemente „Punkt“ und „Gerade“ durchweg mit einander vertauscht. Wenn man nun die bisher aufgestellten graphischen Sätze, soweit sie sich auf Planfiguren beziehen, durchmustert, so beobachtet man überall die Zulässigkeit jener Vertauschung; und da dies — wie sich zeigen wird — auf einem allgemeinen Gesetze beruht, so sagt man, es finde in der graphischen Planimetrie eine Reciprocität oder Dualität statt zwischen den Punkten und Geraden, und stellt jedem graphischen Begriffe der Planimetrie einen reciproken oder dualen Begriff gegenüber. Bei dieser auf die Ebene bezüglichen Reciprocität sind „Punkt“ und „Gerade“, „gerade Punktreihe“ und „Strahlenbüschel“, „Verbindungslinie zweier Punkte“ und „Durchschnittspunkt zweier Geraden“ reciprok, das „Aneinanderliegen“ und „Getrenntliegen“ sich selbst reciprok. Sind zwei Figuren in einer Ebene nach den in § 10 gegebenen Definitionen perspectiv, so sind

allemal auch die reciproken Figuren perspectiv. Daraus folgt weiter, dass die Begriffe „perspectiv“ und „harmonisch“ auch in der Ebene sich selbst reciprok sind.

Werden in einem graphischen Satze, welcher von einer Planfigur handelt, alle Begriffe durch die reciproken ersetzt, so entsteht der reciproke oder duale Satz der Planimetrie, dessen reciproker Satz wieder der ursprüngliche ist; und wenn man von zwei solchen Sätzen den einen bewiesen hat, so darf man den andern ohne einen besondern Beweis aussprechen. Hierin besteht das Gesetz der Dualität für die Planfiguren, von dessen Gültigkeit wir uns jetzt überzeugen wollen.

Wir kommen sogleich auf den richtigen Weg, wenn wir beachten, dass der Uebergang von Satz 1. des § 9 zu Satz 3. durch Satz 2. vermittelt werden kann. Man gelangt von 1. zu 2. durch die eine, von 2. zu 3. durch die andere der beiden schon begründeten Uebertragungsregeln und wird demgemäss von 1. zu 3. durch eine Verknüpfung beider Regeln direct gelangen. Wir verfolgen den Hergang an irgend einem graphischen Satze der Planimetrie. In einem solchen kann nur die Rede sein von Punkten und Geraden, die an einer Ebene liegen, vom Aneinanderliegen der Elemente und vom Getrenntliegen der Paare. Der Satz bleibt gültig, wenn man in ihm die Punkte durch Geraden, die Geraden durch Ebenen, die Ebene durch einen Punkt ersetzt, aber er bezieht sich jetzt auf eine centrische Figur. Dem so erhaltenen Theoreme entspricht vermöge der Reciprocität zwischen Punkt und Ebene wieder ein planimetrisches Theorem; um dieses herzustellen, habe ich in der zweiten Fassung die Ebenen durch Punkte, den Punkt durch eine Ebene zu ersetzen, während alles Andere ungeändert bleibt. Die beiden Uebertragungen, nach einander ausgeführt, haben also auf den vorgelegten Satz die Wirkung, dass sich die Punkte in Geraden und die Geraden in Punkte verwandeln, d. h. sie liefern den dualen Satz der Planimetrie.

Für die centrischen Figuren besteht ein ähnliches Gesetz, nach welchem die Sätze 2. und 4. des § 9 zusammengehören. Man darf in jedem graphischen Satze, der von einer centrischen Figur handelt, die Elemente „Gerade“ und „Ebene“ mit einander vertauschen und demgemäss von einer für solche Sätze gültigen Reciprocität zwischen den Geraden und Ebenen sprechen. Bei dieser sind „Aneinanderliegen“, „Getrenntliegen“, „perspectiv“ und „harmonisch“ sich selbst reciprok, „Gerade“ und „Ebene“, „Strahlenbüschel“ und „Ebenenbüschel“, „Ebene zweier Str

und „Durchschnittslinie zweier Ebenen“ einander reciprok. Wenn von zwei reciproken Sätzen über centrische Figuren der eine richtig ist, so ist es auch der andere. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Dualität zwischen Punkt und Ebene auf die vorige Betrachtung anzuwenden.

Bei der Begründung der Dualität zwischen den Punkten und Geraden an einer Ebene und der Dualität zwischen den Geraden und Ebenen an einem Punkte haben wir die Dualität zwischen den Punkten und Ebenen benutzt. Da diese noch nicht ohne eine gewisse Einschränkung bewiesen werden konnte, so bleibt vorläufig auch an jenen die entsprechende Einschränkung haften. Wir kommen auf das allgemeine Dualitätsgesetz, wenn weitere Grundsätze eingeführt sein werden, wieder zurück (§§ 16. 18), um es von der erwähnten Beschränkung zu befreien. Ist dies geschehen, so wird der bezüglich der beiden specielleren Dualitätsgesetze gemachte Vorbehalt von selbst hinfällig. —

Ich sagte: Alles, was wir von graphischer Geometrie jetzt herstellen können, besteht in Folgerungen aus den graphischen Sätzen der §§ 7—9; in diesen kann man die Worte Punkt und Ebene durchweg vertauschen; deshalb gelten auch die Folgerungen ungeschmälert weiter, wenn man in ihnen die Worte Punkt und Ebene durchweg vertauscht. Es muss in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Process des Folgerns überall unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten *Beziehungen* zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen. Während der Deduction ist es zwar statthaft und nützlich, aber *keineswegs nöthig*, an die Bedeutung der auftretenden geometrischen Begriffe zu denken; so dass geradezu, wenn dies nöthig wird, daraus die Lückenhaftigkeit der Deduction und (wenn sich die Lücke nicht durch Abänderung des Raisonnements beseitigen lässt) die Unzulänglichkeit der als Beweismittel vorausgeschickten Sätze hervorgeht. Hat man aber ein Theorem aus einer Gruppe von Sätzen — wir wollen sie Stammsätze nennen — in voller Strenge deducirt, so besitzt die Herleitung einen über den ursprünglichen Zweck hinausgehenden Werth. Denn wenn aus den Stammsätzen dadurch, dass man die darin verknüpften geometrischen Begriffe mit gewissen anderen vertauscht, wieder richtige Sätze hervorgehen, so ist in dem Theoreme die entsprechende Vertauschung zulässig; man erhält so, ohne die Deduction zu wiederholen, einen (im Allgemeinen) neuen Satz, eine Folgerung aus den veränderten Stamm-

sätzen. Von dieser Berechtigung wurde schon im ersten Paragraphen wiederholt Gebrauch gemacht, dann im dritten und vierten, endlich im gegenwärtigen Paragraphen nicht bloss zur Begründung der Dualität zwischen Punkt und Ebene, sondern schon beim Beweise der Behauptung, dass alle uns jetzt zugänglichen graphischen Sätze sich aus den graphischen Sätzen der §§ 7—9 folgern lassen.

Die im ersten und sechsten Paragraphen gegebenen Bemerkungen über das Beweisverfahren werden hierdurch vervollständigt. Man wird diese Erörterung nicht für überflüssig erklären, wenn man darauf achtet, wie oft die besprochenen Anforderungen unerfüllt bleiben, sogar in Schriften, welche sich die Begründung der Geometrie oder anderer mathematischer Disciplinen zur Aufgabe machen. Der allgemeinen Auffassung nach sollen die Lehrsätze logische Folgerungen aus den Grundsätzen sein. Aber nicht immer bringt man sich alle benutzten Beweismittel ausdrücklich zum Bewusstsein. Dass dies zum Theil von der Anwendung der Figuren herrührt, ist in § 6 besprochen worden; aber selbst wenn kein sinnliches Bild, nicht einmal die bewusste innerliche Vorstellung eines solchen, zugelassen wird, so übt der Gebrauch vieler Wörter, mit denen namentlich die einfacheren geometrischen Begriffe bezeichnet werden, an sich schon einen gewissen Einfluss aus. Einen Theil der Ausdrücke, mit deren Handhabung im täglichen Leben wir durch frühzeitige Gewöhnung vertraut geworden sind, treffen wir in der Wissenschaft wieder an; und wie im täglichen Leben beim Gebrauche jener Ausdrücke zugleich allerhand Beziehungen zwischen den entsprechenden Begriffen sich mit unseren Gedanken verflechten, ohne dass wir uns davon besondere Rechenschaft geben, so gelingt es selbst in der strengen Wissenschaft nicht leicht, die unbewussten Beimischungen ganz fernzuhalten. Eben diese Beimischungen müssen an das Licht gebracht werden, damit die Grundlage, auf welcher sich die Geometrie aufbaut, in ihrem wahren Umfange zu erkennen sei.

Bei der Aufsuchung neuer Wahrheiten wird man sich unbedenklich aller Mittel bedienen, welche zum Ziele führen können. Anders verhält es sich mit der Prüfung und Darstellung des Gefundenen, welche in der Mathematik nur dann befriedigt, wenn die neue Thatsache als eine Folge der bekannten Thatsachen erscheint. Diese Forderung ist wohl aus der Wahrnehmung entsprungen, wie man in der Mathematik reichlicher als auf irgend einem Gebiete die Möglichkeit antrifft, durch Schlussfolgerungen ohne besonderes Experiment, Neues und Richtiges aus Be

zu finden; sie wird um so sicherer von selbst erfüllt, je weiter man sich von den Grundbegriffen entfernt, je ausschliesslicher man also mit zusammengesetzten Begriffen umgeht, die wegen ihrer nicht gemeinfasslichen Bedeutung keine Relationen zulassen, welche sich unbemerkt in eine Schlussfolgerung einschleichen könnten. Wenn nun die Mathematik an die streng deductive Methode, der sie gerecht zu werden vermag, sich wirklich bindet, so darf man hierin keinen überflüssigen Zwang erblicken. Der Werth jener Methode besteht darin, dass die ihr entsprechende Auffassung des Beweisverfahrens alle Willkür ausschliesst, während bei jeder andern Auffassung die Unanfechtbarkeit der Beweise aufhört, weil der Beurtheilung keine scharfe Grenze gezogen werden kann. Die Unanfechtbarkeit der Beweise, durch welche die Lehrsätze auf die Grundsätze zurückgeführt werden, im Verein mit der Evidenz der Grundsätze selbst, welche durch die einfachsten Erfahrungen verbürgt sein sollen, giebt der Mathematik den Charakter höchster Zuverlässigkeit, den man ihr zuzuschreiben pflegt. Um diese Eigenschaften überall zu erzielen, wird man sich allerdings zu mancher Weitläufigkeit genöthigt sehen; aber auf der andern Seite werden gerade durch eine präcise Darstellung gewisse Vereinfachungen ermöglicht. Zunächst hat die erhöhte Verwendbarkeit der Beweise sich schon wiederholt als nützlich erwiesen (vgl. S. 99). Sodann — und darauf möchte ich hier das Hauptgewicht legen — erkennt man bei solcher Darstellung die Entbehrlichkeit gewisser Bestandtheile, welche gewohnheitsmässig mit überliefert werden. Die Wissenschaft schöpft einen Theil ihres Stoffes unmittelbar aus der Sprache des täglichen Lebens. Aus dieser Quelle sind Ausdrucksweisen und Anschauungen, mit denen man wissenschaftliche Sätze nicht formuliren sollte, auch in die Mathematik hineingelangt und dort die Veranlassung geworden, dass gewisse Partieen unklar erscheinen, und dass sich zahlreiche Discussionen, namentlich über geometrische Dinge, erhoben haben. Welche Rolle die einzelnen Begriffe und Relationen in dem Systeme spielen, wieweit sie für das Ganze nothwendig oder entbehrlich sind, tritt nur bei absolut strenger Darstellung an den Tag. Erst wenn auf solchem Wege die wesentlichen Bestandtheile vollständig gesammelt, die überflüssigen aber ausgeschieden sind, wird man für jene Discussionen, soweit sie nicht dadurch gegenstandslos werden, die richtige Grundlage besitzen.

§ 13. Von den congruenten Figuren.

Bei der geometrischen Betrachtung einer Figur wird immer vorausgesetzt, dass ihre Bestandtheile einem festen Körper angehören oder doch mit einander in hinreichend fester Verbindung stehen. In den bisherigen Entwickelungen wurde sogar angenommen, dass alle in einer und derselben Betrachtung auftretenden Elemente eine Figur im obigen Sinne bilden, und wenn also zwei Figuren in Beziehung gebracht wurden, wie dies z. B. bei der Erklärung der Perspectivität geschah, so mussten jene Figuren mit einander fest verbunden sein.

Wir werden jetzt, um den Begriff der Congruenz einzuführen, uns für einige Zeit auf Figuren beschränken, welche nur aus Punkten zusammengesetzt sind, und zwar aus eigentlichen Punkten. Wir halten daran fest, dass jede Figur auf einem festen Körper verzeichnet ist, aber wir verlangen nicht, dass alle gleichzeitig betrachteten Figuren sich auf einem und demselben festen Körper befinden. Ist eine Figur $abcd$ gegeben, so darf man die Punktgruppen ab, ac, abc u. s. w. ebenfalls Figuren nennen; aber wenn zwei Figuren ef und gh gegeben sind, so kommt der Punktgruppe $efgh$ der Name einer Figur nicht nothwendig zu, weil die Figuren ef und gh möglicherweise gegen einander beweglich sind.

Es seien, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, zwei fest verbundene Punkte ab gegeben und zwei ebenfalls fest verbundene Punkte $a'b'$. Die Figuren ab und $a'b'$ sind entweder gegen einander beweglich oder nicht. Wir nehmen zuerst an, dass sie gegen einander beweglich sind. Man kann dann (nachdem etwaige störende Bestandtheile der festen Körper beseitigt sind) die Figuren bewegen, bis die Punkte a und a' aneinanderstossen oder die Punkte b und b'. Wenn es gelingt, beides gleichzeitig zu bewirken, so sagt man, dass die Figuren ab und $a'b'$ zum Decken gebracht sind, und wenn die Figuren hierauf wieder beliebig bewegt werden, so wird von ihnen gesagt, dass sie einander zu decken vermögen.

Wie immer die Figur ab gegeben sein mag, so kann man Figuren herstellen, welche im Stande sind, ab zu decken. Man wird sich dazu eines festen Körpers bedienen, welcher die Punkte a und b gleichzeitig zu berühren vermag; auf einem solchen werden zwei Punkte α und β so gewählt, dass die Figuren ab und $\alpha\beta$ sich zum Decken bringen lassen. Man bewegt z. B. einen (Maasstab, Lineal) an die Punkte a und b heran und vermer

ihm die Stellen, welche an a und b stossen; oder man stellt die Spitzen eines Zirkels auf die Punkte a und b, so dass die Spitzen mit α und β bezeichnet werden können. Es ist gleichgültig, welche Spitze auf a, welche auf b gestellt war; überhaupt, wenn die Figur $\alpha\beta$ im Stande war ab zu decken, so kann sie auch mit ba zum Decken gebracht werden.

Ich kehre jetzt zu den Figuren ab und $a'b'$ zurück, von denen vorläufig angenommen wurde, dass sie gegen einander beweglich sind. Mit $\alpha\beta$ bezeichne ich eine gegen ab und $a'b'$ bewegliche Figur, welche mit ab zum Decken gebracht werden kann, und prüfe, ob auch $a'b'$ und $\alpha\beta$ zum Decken gebracht werden können. Es zeigt sich, dass diese Prüfung die vorige, bei welcher ab und $a'b'$ unmittelbar verglichen wurden, vollständig ersetzt, d. h. wenn (ausser ab und $\alpha\beta$ auch) $a'b'$ und $\alpha\beta$ sich decken können, so können ab und $a'b'$ sich decken, und umgekehrt. Wenn von den drei Figuren ab, $a'b'$, $\alpha\beta$ eine die beiden andern decken kann, so können diese beiden sich decken.

Sehen wir jetzt ganz davon ab, ob die Figuren ab und $a'b'$ gegen einander beweglich sind oder nicht. Ich kann jedenfalls eine Figur herstellen, welche gegen jene beiden Figuren beweglich ist und mit der einen zum Decken gebracht werden kann. Ist es möglich, eine und dieselbe Figur sowohl mit ab als auch mit $a'b'$ zum Decken zu bringen, so heissen die Figuren ab und $a'b'$ congruent.

Wenn die Figuren ab und $a'b'$ gegen einander beweglich sind, so erweisen sie sich als congruent, wenn sie sich zu decken vermögen, und es ist alsdann die Zuziehung einer dritten Figur nicht nöthig. Wenn die Figuren ab und $a'b'$ mit einander fest verbunden, z. B. auf einer und derselben Platte verzeichnet sind, so ist es zwar nicht unmöglich, die feste Verbindung zu lösen; aber es ist immer erwünscht, unter Umständen sogar nothwendig, ein anderes Mittel zur Vergleichung zu besitzen. In der That sind wir gewohnt, solche Figuren durch Vermittelung einer Hülfsfigur zu vergleichen, welche in der Regel durch zwei Punkte an einem Stabe oder durch die Spitzen eines Zirkels dargestellt wird. Und diese Vermittelung ist geradezu nothwendig, wenn die Figuren ab und $a'b'$ einen oder beide Punkte gemein haben. Es sollte nicht ausgeschlossen werden, dass a' mit a zusammenfällt oder mit b; es können innerhalb einer Figur abb' die Theile ab und ab' congruent sein. Auch ist schon oben die Figur ba neben der Figur ab aufgetreten, und wir haben bemerkt, dass eine und dieselbe Figur im Stande ist, jene beiden zu decken. Die Figuren ab und ba sind demnach con-

gruent zu nennen, ohne dass sie eine directe Vergleichung gestatten.

Wir haben, wenn auch zunächst nur für den einfachsten Fall, einen neuen Grundbegriff eingeführt, nämlich den Begriff zweier Figuren, welche zum Decken gebracht werden können, und mit Hülfe desselben die Bedeutung des Wortes „congruent“ erklärt. Wir haben zugleich mehrere sehr einfache, auf den neuen Begriff bezügliche Thatsachen erwähnt, welche unmittelbar aus der Erfahrung zu entnehmen sind. Diese Thatsachen und eine Reihe anderer von gleicher Beschaffenheit habe ich jetzt als Grundsätze zu formuliren, nach deren Herstellung wieder die deductive Entwickelung Platz greift. Ich spreche zuerst den folgenden Grundsatz aus:

I. Grundsatz. — Die Figuren ab und ba sind congruent.

Sind drei Figuren ab, $a'b'$, $a''b''$ gegen einander beweglich, so ist schon constatirt worden, dass $a'b'$ und $a''b''$ einander decken können, wenn ab beide zu decken vermag. Sehen wir aber wieder davon ab, ob die Figuren fest verbunden sind oder nicht, und setzen wir voraus, dass ab und $a'b'$ congruent sind, zugleich auch ab und $a''b''$. Es kann also eine Figur $\alpha\beta$ zum Decken gebracht werden mit ab und $a'b'$, ferner eine Figur $\alpha'\beta'$ mit ab und $a''b''$; $\alpha\beta$ ist gegen ab und $a'b'$, $\alpha'\beta'$ gegen ab und $a''b''$ beweglich. Die Figuren ab und $\alpha\beta$ sind congruent; da sie möglicherweise fest verbunden sind, so sei AB eine gegen die vorigen bewegliche Figur, welche ab decken kann. Es können sich alsdann decken AB und ab, $\alpha\beta$ und ab, $\alpha'\beta'$ und ab, folglich AB und $\alpha\beta$, AB und $\alpha'\beta'$; ferner $a'b'$ und $\alpha\beta$, $a''b''$ und $\alpha'\beta'$, folglich AB und $a'b'$, AB und $a''b''$, d. h. $a'b'$ und $a''b''$ sind congruent. Sind zwei Figuren $a'b'$ und $a''b''$ einer Figur ab congruent, so sind sie einander congruent. Diese Thatsache wird einen besonderen Fall des siebenten Grundsatzes bilden.

Ist eine Figur ab gegeben, so kann man eine congruente Figur $a'b'$ herstellen, von der man den einen Punkt, etwa a', beliebig wählen darf. Man kann nämlich eine Figur $\alpha\beta$ herstellen, welche gegen die Figur ab und den Punkt a' beweglich und ab zu decken im Stande ist; mit Hülfe von $\alpha\beta$ (also z. B. des Zirkels) wird sodann b' aufgefunden und nöthigenfalls mit a' in feste Verbindung gebracht. Diese Thatsache ist als einfachster Fall im achten Grundsatze mit enthalten. Hier ist jedoch hinzuzufügen, dass in Betreff des Punktes b' noch eine bestimmte Forderung gestellt werden darf. Der Punkt a' konnte beliebig gewählt werden; lassen wir ihn mit a zusammenfallen und ziehen von a aus eine gerade Strecke nach irgend einem Punkte c, so dass die Figur abc entsteht. Man l

verlangen, dass b' in dieser Strecke oder in ihrer Verlängerung über c hinaus angegeben werde; ein solcher Punkt existirt allemal und zwar nur einer.

II. Grundsatz. — Zur Figur abc kann man einen und nur einen eigentlichen Punkt b' derart hinzufügen, dass ab und ab' congruente Figuren werden und b' in der geraden Strecke ac oder c in der geraden Strecke ab' liegt.

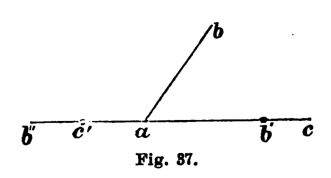


Fig. 37.

Wird also die gerade Linie ac mit g bezeichnet und in ihr der eigentliche Punkt c' ausserhalb des Schenkels ac angenommen, so giebt es in der Geraden g zwei (und nicht mehr) eigentliche Punkte, b' und b'', von denen der eine im Schenkel ac, der andere im Schenkel ac' liegt, so dass ab, ab', ab'' congruente Figuren sind. Man kann b' und b'' etwa mit Hülfe des Zirkels bestimmen.

Betrachten wir jetzt zwei Figuren abc und $a'b'c'$, welche aus je drei Punkten bestehen. Sie sind entweder fest mit einander verbunden oder nicht. Um beide Fälle zugleich zu berücksichtigen, gehe ich davon aus, dass stets eine Figur $\alpha\beta\gamma$ herstellbar ist, welche gegen jene beiden bewegt und mit der einen, etwa mit abc, zum Decken gebracht werden kann, wobei die Punkte a und α, b und β, c und γ aneinanderstossen. Eine solche Figur lässt sich auf jedem festen Körper verzeichnen, der die Punkte abc gleichzeitig zu berühren vermag. Ist es möglich, eine und dieselbe Figur $\alpha\beta\gamma$ sowohl mit abc als auch mit $a'b'c'$ zum Decken zu bringen, so heissen die Figuren abc und $a'b'c'$ congruent. Jetzt ist es aber nicht mehr gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Punkte geschrieben werden. Wenn die Figur $\alpha\beta\gamma$ im Stande ist abc zu decken, so ist sie im Allgemeinen nicht im Stande bac zu decken. Wenn die Figuren abc und $a'b'c'$ congruent sind, so sind zwar auch bac und $b'a'c'$ congruent, aber im Allgemeinen nicht bac und $a'b'c'$. Die zusammengehörigen Punkte, a und a', b und b', c und c', werden homologe Punkte der congruenten Figuren genannt.

Mit der Figur abc ist die Figur ab als ein Theil gegeben, welcher mit der Figur $\alpha\beta$ zum Decken gebracht werden kann. Ist nun $\alpha\beta\gamma$ im Stande, abc und $a'b'c'$ zu decken, können also $\alpha\beta$ und $a'b'$ sich decken, so sind die Figuren ab und $a'b'$ congruent. Wir werden die Figuren ab und $a'b'$, ac und $a'c'$, bc und $b'c'$ homologe Theile der congruenten Figuren abc und $a'b'c'$ nennen. Dass solche homologe Theile congruent sind, bildet einen besonderen Fall des sechsten Grundsatzes.

Die Figur abc kann aus drei Punkten einer Geraden bestehen. Nehmen wir an, dass c in der Geraden ab zwischen a und b liegt, dass die Figuren ab und $a'b'$ mit $\alpha\beta$ zum Decken gebracht werden können, und dass a mit b, a' mit b', α mit β durch gerade Strecken verbunden sind. Bringe ich ab und $\alpha\beta$ zum Decken, so nehme ich wahr, dass die Punkte der Strecke ab an die Punkte der Strecke $\alpha\beta$ stossen und umgekehrt, und man sagt daher, dass die Strecken ab und $\alpha\beta$ zum Decken gebracht seien; zugleich ergiebt sich ein bestimmter Punkt γ der Strecke $\alpha\beta$, welcher an den Punkt c stösst. Auch die Strecken $\alpha\beta$ und $a'b'$ werden sich decken können, und man nennt deshalb die Strecken ab und $a'b'$ congruent. Bringt man nun die Strecken $\alpha\beta$ und $a'b'$ zum Decken, so ergiebt sich ein bestimmter Punkt c' der Strecke $a'b'$, welcher vom Punkte γ gedeckt wird, so dass abc und $a'b'c'$ congruente Figuren sind.

a c b

a' c' b'

III. Grundsatz. — Liegt der Punkt c innerhalb der geraden Strecke ab und sind die Figuren abc und $a'b'c'$ congruent, so liegt der Punkt c' innerhalb der geraden Strecke $a'b'$.

Congruente Strecken kommen in Betracht, wenn eine Strecke ab mit einer anderen uv gemessen werden soll. Nach den Vorbemerkungen zum zweiten Grundsatze kann ich auf dem Schenkel ab den Punkt c_1 so angeben, dass ac_1 und uv congruente Figuren werden; es handelt sich hier nur um den Fall, wo c_1 zwischen a und b zu liegen kommt. Ich kann (II.) die Strecke ac_1 bis c_2 — und zwar nur auf eine Art — so verlängern, dass die Strecken c_1a und c_1c_2 congruent werden, folglich auch ac_1 und c_1c_2. Ebenso kann ich die Strecke c_1c_2 um die congruente Strecke c_2c_3 verlängern, diese um die congruente Strecke c_3c_4 u. s. f. Beim Messen

a c_1 c_2 c_3 c_4 c_n b c_{n+1}

wird jedoch ein bestimmtes Ziel erstrebt und auch erreicht. Man verfolgt nämlich die Reihe der Punkte $c_1c_2c_3\ldots$ nur bis zum Punkte c_n, wenn b entweder mit c_n zusammenfällt oder von den Punkten c_n und c_{n+1} eingeschlossen werden würde, und zu einem solchen Punkte c_n kann man allemal durch eine endliche Anzahl von Constructionen gelangen.

IV. Grundsatz. — Liegt der Punkt c_1 innerhalb der geraden Strecke ab, und verlängert man die Strecke ac_1 um die congruente Strecke c_1c_2, diese um die congruente Strecke c_2c_3 u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke c_nc_{n+1}, welche den Punkt b enthält.

Betrachten wir wieder die Figur abc, aus drei Punkten einer Geraden bestehend, und nehmen wir jetzt an, dass die Strecken ac und bc congruent, also c zwischen a und b gelegen ist. Eine Figur $\alpha\beta\gamma$ werde hergestellt, welche abc zu decken vermag. Werden die Strecken ba und $\alpha\beta$ zum Decken gebracht, so deckt γ einen bestimmten Punkt der Strecke ba, der von c nicht verschieden sein kann; die Figuren abc und bac sind demnach congruent. Aber auch wenn abc nicht in gerader Linie liegen, wird dieselbe Beobachtung gemacht.

V. Grundsatz. — Wenn in der Figur abc die Strecken ac und bc congruent sind, so sind die Figuren abc und bac congruent.

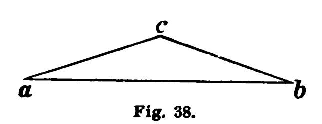


Fig. 38.

Diese Thatsache kann noch in anderer Form ausgesprochen werden. Wenn ca und $\gamma\alpha$ beliebige Strecken, aber nicht fest verbunden sind, so kann man sie gegen einander bewegen, bis die Punkte c und γ aneinanderstossen und zugleich entweder a an einen Punkt der Strecke $\gamma\alpha$ oder α an einen Punkt der Strecke ca. Es wird dann jeder Punkt des Schenkels ca von einem Punkte des Schenkels $\gamma\alpha$ gedeckt und umgekehrt, und man wird daher sagen, es seien die Schenkel ca und $\gamma\alpha$ zum Decken gebracht. Wenn in der Figur abc die Strecken ca und cb zu verschiedenen Geraden gehören, ebenso in der Figur $\alpha\beta\gamma$ die Strecken $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$, und die Figuren nicht fest verbunden sind, so kann man sie bewegen, bis die Schenkel ca und $\gamma\alpha$ sich decken oder die Schenkel cb und $\gamma\beta$.

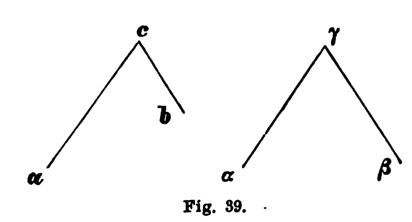


Fig. 39.

Gelingt es nun, beides gleichzeitig zu bewirken, so sagt man, es seien die Winkel acb und $\alpha\gamma\beta$ zum Decken gebracht*). Wenn die Winkel acb und $\alpha\gamma\beta$ sich decken können, so braucht dies von den Figuren acb und $\alpha\gamma\beta$ nicht zu gelten; dazu ist vielmehr noch nothwendig und hinreichend, dass die Strecken ca und $\gamma\alpha$, cb und $\gamma\beta$ congruent sind.

Es seien jetzt zwei Figuren abc und $a'b'c'$ gegeben; die Strecken ca und cb sollen zu verschiedenen Geraden gehören, ebenso die Strecken $c'a'$ und $c'b'$. Immer lässt sich eine gegen abc und $a'b'c'$ bewegliche Figur $\alpha\beta\gamma$ so herstellen, dass die Winkel acb und $\alpha\gamma\beta$ sich decken können (Transporteur), und zwar ist es

*) Eine Definition des Winkels wird hier nicht beabsichtigt.

gleichgültig, in welcher Anordnung die Schenkel auf einander gelegt werden, d. h. es können auch die Winkel bca und $\alpha\gamma\beta$ sich decken. Ist es möglich, einen und denselben Winkel $\alpha\gamma\beta$ mit den Winkeln acb und $a'c'b'$ zum Decken zu bringen, so heissen die Winkel acb und $a'c'b'$ congruent. — Es seien zwei congruente Winkel acb und $a'c'b'$ vorgelegt; die Figuren acb und $a'c'b'$ brauchen alsdann nicht congruent zu sein. Ich kann aber die Figur $\alpha\beta\gamma$ so wählen, dass die Figuren acb und $\alpha\gamma\beta$ sich decken können; damit auch die Figuren $a'c'b'$ und $\alpha\gamma\beta$ sich zum Decken bringen lassen, ist noch die Congruenz der Strecken $c'a'$ und $\gamma\alpha$, $c'b'$ und $\gamma\beta$ nothwendig und hinreichend. Sobald daher ca und $c'a'$, cb und $c'b'$ congruente Strecken sind, so sind auch die Figuren acb und $a'c'b'$ (oder abc und $a'b'c'$) congruent.

Hiernach sind die Winkel acb und bca stets congruent. Nimmt man aber insbesondere congruente Strecken ca und cb, so sind auch die Figuren abc und bac congruent, wie im fünften Grundsatze behauptet wurde.

Es ist nun an der Zeit, Figuren zu betrachten, welche aus beliebig vielen Punkten bestehen. Die Figuren $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'\ldots$ seien aus gleichvielen Punkten zusammengesetzt. Immer ist eine Figur $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ herstellbar, welche gegen jene beiden bewegt und mit der einen zum Decken gebracht werden kann, wobei die Punkte a und α, b und β u. s. w. aneinanderstossen. Ist es möglich, die Figur $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ mit beiden gegebenen Figuren zum Decken zu bringen, so heissen diese congruent. Die Congruenz ist aber von der Wahl der Figur $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ nicht abhängig; haben sich die Figuren $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'\ldots$ als congruent erwiesen, und kann man eine von ihnen auf die gegen beide bewegliche Figur $ABCD\ldots$ legen, so lässt auch die andere sich auf $ABCD\ldots$ legen. Man mag deshalb das Wesen der congruenten Figuren durch die Aussage bezeichnen, dass jede die Lage der anderen einzunehmen im Stande ist.

Um die Congruenz der Figuren $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'\ldots$ zu erkennen, wird eine Hülfsfigur $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ benutzt, und es werden einmal die Punkte a und α, b und β u. s. w. mit einander in Berührung gebracht, das andere Mal die Punkte a' und α, b' und β u. s. w. Dieser Zusammengehörigkeit entsprechend, heissen a und a' homologe Punkte, ebenso b und b' u. s. w. Jedem Theile der Figur $abcd\ldots$ entspricht ein Theil der Figur $a'b'c'd'\ldots$, nämlich der aus den homologen Punkten zusammengesetzte, welchen wir den homologen Theil nennen dürfen, und je zwei

homologe Theile können mit einem gewissen Theile der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ .... zum Decken gebracht werden.

VI. Grundsatz. — Wenn zwei Figuren congruent sind, so sind auch ihre homologen Theile congruent*).

Es ist hier nicht ausgeschlossen, dass homologe Theile zusammenfallen, z. B. bei zwei congruenten Figuren abc und abc'. In der That sind wir berechtigt, jede Figur sich selbst congruent zu nennen, wobei aber jeder Punkt sich selbst homolog ist und mithin nicht an diejenige Congruenz gedacht werden soll, welche zwischen den Strecken ab und ba, zwischen den Winkeln acb und bca stattfindet. Wenn bei zwei congruenten Figuren ein Punkt sich selbst entspricht, so kann man sagen: Die Figuren haben den Punkt entsprechend gemein.

Vom sechsten Grundsatze war schon an früherer Stelle ein besonderer Fall erwähnt worden; die gleiche Verallgemeinerung wird noch zwei anderen früheren Bemerkungen zu Theil. Man nehme an, dass die Figuren $a'b'c'd'$ ... und $a''b''c''d''$ ... einer dritten Figur $abcd$ ... congruent sind; es ist dann immer möglich, eine Figur $ABCD$ ... herzustellen, beweglich gegen jene drei Figuren und fähig die letzte zu decken; mit einer solchen Figur $ABCD$ ... können auch die beiden erstgenannten Figuren zum Decken gebracht werden.

VII. Grundsatz. — Wenn zwei Figuren einer dritten congruent sind, so sind sie einander congruent.

Wenn ferner eine Figur ab und ein Punkt a' irgendwie gegeben sind, so kann man (wie bereits erwähnt) mit dem letzteren einen Punkt b' so verbinden, dass ab und $a'b'$ congruente Figuren sind. Wenn aber die Figuren abc und $a'b'$ gegeben sind, so kann man mit der letzteren nicht immer einen Punkt c' so verbinden, dass abc und $a'b'c'$ congruente Figuren sind; vielmehr ist hierzu die Congruenz der Figuren ab und $a'b'$ nothwendig und ausreichend. Ueberhaupt wenn die Figuren $abc \dots kl$ und $a'b'c' \dots k'$ gegeben sind und zwischen $abc \dots k$ und $a'b'c' \dots k'$ Congruenz stattfindet, so lässt sich der Punkt l' so anbringen, dass $abc \dots kl$ und $a'b'c' \dots k'l'$ congruente Figuren werden. Um einen solchen Punkt zu erhalten, wird man eine Figur $ABC \dots KL$ herstellen, welche gegen die beiden gegebenen bewegt und mit $abc \dots kl$ zum Decken gebracht werden kann, und diese Figur bewegen, bis $ABC \dots K$

*) Ich muss diesen Satz unter die Grundsätze aufnehmen, um nicht genöthigt zu sein, in den späteren Paragraphen auf die Definition der Congruenz zurückzugehen.

und $a'b'c' \ldots k'$ sich decken. Alle diese Thatsachen umfasst der folgende Grundsatz, sobald man zulässt, dass ein einzelner Punkt eine Figur bildet und zwei Punkte immer zu den congruenten Figuren gerechnet werden.

VIII. Grundsatz. — Wird von zwei congruenten Figuren die eine um einen eigentlichen Punkt erweitert, so kann man die andere um einen eigentlichen Punkt so erweitern, dass die erweiterten Figuren wieder congruent sind.

In den beiden einfachsten Fällen kann man über die hiermit ausgesprochene Möglichkeit noch hinausgehen. Soll nämlich bei gegebenem a die Figur ab congruent der gegebenen Figur fg hergestellt werden, so darf man noch fordern, dass b in eine durch a beliebig gezogene Gerade fällt (II.), und hat in der letzteren zwischen zwei Punkten auf verschiedenen Seiten von a die Wahl. Aehnliches findet nun statt, wenn die Figuren ab und fgh so gegeben werden, dass ab und fg congruent sind, und die Figur abc congruent mit fgh bestimmt werden soll; dabei ist jedoch vorauszusetzen, dass fgh nicht in gerader Linie liegen. Es sei nämlich FGH eine gegen ab und fgh bewegliche Figur, welche fgh zu decken vermag, so dass auch ab und FG sich decken können. Ist alsdann durch die Punkte a und b irgend eine Ebene gelegt, so kann man FGH bewegen, bis nicht bloss FG und ab sich decken, sondern auch gleichzeitig H einen Punkt der Ebene deckt, und zwar kann dies auf zwei Arten geschehen. In der gegebenen Ebene findet man demnach zwei Punkte c und d, welche Figuren abc und abd congruent mit fgh liefern, und man bemerkt überdies, dass c und d auf verschiedenen Seiten der Geraden ab liegen.

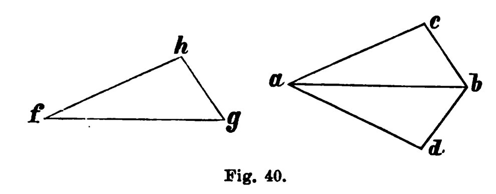


Fig. 40.

IX. Grundsatz. — Sind zwei Figuren ab und fgh gegeben, fgh nicht in einer geraden Strecke enthalten, ab und fg congruent, und wird durch a und b eine ebene Fläche gelegt, so kann man in dieser oder in ihrer Erweiterung genau zwei Punkte c und d so angeben, dass die Figuren abc und abd der Figur fgh congruent sind, und zwar hat die Strecke cd mit der Strecke ab oder deren Verlängerung einen Punkt gemein.

Mit anderen Worten, unter Berücksichtigung früherer Bemerkungen: Sind zwei Figuren ab und fgh gegeben, fgh nicht in gerader Linie, und wird durch a und b eine Ebene gelegt, so kann

man in dieser — und zwar nicht bloss auf eine Art — den Punkt c so angeben, dass die Winkel abc und fgh congruent sind; liegen aber in einer Ebene die Punkte c und c' auf derselben Seite der Geraden ab, so sind die Winkel abc und abc' nicht congruent.

Wenn wir aber jetzt von zwei Figuren abc und $fghi$ ausgehen und die Figuren abc und fgh als congruent voraussetzen, so werden wir zu einem analogen Grundsatze nicht geführt. Lässt nämlich die Figur abc auf mehr als eine Art sich zu einer mit $fghi$ congruenten Figur erweitern, etwa zu $abcd$ und $abce$, so sind die Figuren $abcd$ und $abce$ congruent. Bei der Frage, ob solche Figuren congruent sein können, werden wir annehmen, dass sie keine Planfiguren sind; der andere Fall wird aus den früheren Grundsätzen erledigt. Liegt nun d ausserhalb der Ebene abc, und wird mit $abcd$ eine Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ zum Decken gebracht, so stellt es sich als unmöglich heraus, $abce$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ zum Decken zu bringen.

X. Grundsatz. — Zwei Figuren $abcd$ und $abce$, deren Punkte nicht in ebenen Flächen liegen, sind nicht congruent.

Man gewinnt einen andern Ausdruck für diese Thatsache in folgender Betrachtung.

Sind die Punkte $abcd$ nicht in einer Ebene enthalten und wird die Gerade ab mit m bezeichnet, so entsteht ein „Winkel“ cmd mit der „Kante“ m und den Schenkeln mc und md. Es sei die Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ gegen die vorige beweglich; die Gerade $\alpha\beta$ heisse μ. Man kann die Figuren gegen einander bewegen, bis die Schenkel mc und $\mu\gamma$ sich decken (d. h. jeder Punkt des einen an einen Punkt des andern stösst, insbesondere jeder Punkt der Geraden m an einen Punkt der Geraden μ) oder die Schenkel md und $\mu\delta$. Tritt beides zugleich ein, so sagt man, die Winkel cmd und $\gamma\mu\delta$ seien zum Decken gebracht. Wenn die Figuren $abcd$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ sich decken können, so gilt dies auch von den Winkeln cmd und $\gamma\mu\delta$. — Sind auch die Punkte $a'b'c'd'$ nicht in einer Ebene enthalten und bedeutet m' die Gerade $a'b'$, so kann es vorkommen, dass ein Winkel $\gamma\mu\delta$ die beiden Winkel cmd und $c'm'd'$ zu decken vermag; die letzteren heissen alsdann congruent. Wenn die Figuren $abcd$ und $a'b'c'd'$ congruent sind, so sind es auch die Winkel cmd und $c'm'd'$. Nehmen wir nun ausserhalb der Ebene abc den Punkt e auf derselben Seite mit d, dann liegen überhaupt die Schenkel md und me auf derselben Seite der Ebene abc, mithin entweder der Schenkel md zwischen mc und me (im Winkel cme) oder me zwischen mc und md (im Winkel cmd). Man bemerkt aber, dass bei solcher Lage die Winkel cmd und cme nicht congruent sind. Daraus

folgt, dass die Figuren *abcd* und *abce* nicht congruent sind, wenn *d* und *e* auf derselben Seite der Ebene *abc* liegen.

Nehmen wir endlich die Punkte *d* und *e* auf verschiedenen Seiten der Ebene *abc*, so ist es der Unterschied zwischen Rechts und Links, welcher hier verwendet werden kann. Wenn nämlich ein Beobachter auf der Seite des Punktes *d* den geraden Weg von *a* nach *b* zurücklegt, so ist für ihn der Punct *c* entweder rechts oder links gelegen; geht der Beobachter jedoch auf die Seite des Punktes *e* über, so erscheint ihm rechts, was zuvor links gelegen war, und umgekehrt. Es seien nun *abcd* und $a'b'c'd'$ congruente Figuren; die Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ sei fähig beide zu decken. Dann übertragen sich erfahrungsgemäss die Bezeichnungen Rechts und Links von der Figur *abcd* auf $\alpha\beta\gamma\delta$, von dieser auf $a'b'c'd'$ in unveränderter Weise. Da eine gleiche Uebertragung von der Figur *abcd* auf *abce* nicht stattfindet, sobald *d* und *e* auf verschiedenen Seiten der Ebene *abc* liegen, so sind solche Figuren nicht congruent.

§ 14. Ausdehnung der Congruenz auf beliebige Elemente.

In den vorstehenden Grundsätzen treten als Elemente von congruenten Figuren nur Punkte und zwar eigentliche Punkte auf. In den beigegebenen Erläuterungen ist zwar diese Einschränkung nicht beobachtet worden; doch sollen für unsere ganze Entwickelung ausschliesslich die Grundsätze massgebend sein, und ich werde demgemäss im Folgenden nur diejenigen Thatsachen und Begriffe benutzen, welche in den Grundsätzen über die congruenten Figuren oder schon in früheren Grundsätzen enthalten sind oder aus solchen abgeleitet werden.

Wenn $abc\,a'b'c'$ eigentliche Punkte, *abc* und $a'b'c'$ congruente Figuren, *abc* Punkte einer Geraden sind, so lehrt der dritte Grundsatz in § 13, dass auch $a'b'c'$ in einer Geraden liegen; wenn also die eine von zwei congruenten Figuren eine gerade Punktreihe ist, so gilt dies auch von der andern; und wenn in der einen von zwei congruenten Figuren eine gerade Punktreihe auftritt, so bilden die homologen Punkte der andern ebenfalls eine gerade Punktreihe (VI. Grundsatz in § 13). Ist in der einen Punktreihe etwa *c* zwischen *a* und *b* gelegen, so liegt in der homologen Reihe c' zwischen a' und b' (III. Grundsatz in § 13); durch die getrennte Lage zweier Paare der einen Reihe wird demnach die getrennte Lage der homologen Paare bedingt.

Es soll fortan gestattet sein, die Verbindungslinie zweier Punkte der einen Figur zugleich mit der Verbindungslinie der homol

Punkte der congruenten Figur in die betreffenden Figuren aufzunehmen, welche auch nach einer solchen Erweiterung congruent genannt werden; die beiden (eigentlichen) Geraden heissen homolog. So oft in der einen Figur ein Punkt und eine Gerade aneinanderliegen, gilt dasselbe von den homologen Elementen; so oft in der einen Figur zwei Geraden sich in einem eigentlichen Punkte schneiden, gilt dasselbe von den homologen Geraden, und zwar können die Durchschnittspunkte als homologe Punkte hinzugenommen werden.

Wenn $abcda'b'c'd'$ eigentliche Punkte, $abcd$ und $a'b'c'd'$ congruente Figuren, $abcd$ Punkte einer Ebene sind, so müssen auch $a'b'c'd'$ in einer Ebene liegen; denn nach dem 12. Lehrsatze des § 2 haben entweder die Geraden ad und bc, oder bd und ac, oder cd und ab einen eigentlichen Punkt gemein, und das Gleiche gilt also von den homologen Geraden. Wenn daher die eine von zwei congruenten Figuren oder ein Theil von ihr aus Punkten einer Ebene besteht, so liegen auch die homologen Punkte der andern Figur in einer Ebene. Wir wollen fortan zulassen, dass die Ebene dreier (nicht in einer Geraden gelegenen) Punkte der einen Figur zugleich mit der Ebene der homologen Punkte zu den betreffenden Figuren hinzugerechnet werde; auch nach der Erweiterung sollen die Figuren congruent, die beiden (eigentlichen) Ebenen homolog heissen. So oft alsdann in der einen Figur ein Punkt und eine Ebene, oder eine Gerade und eine Ebene aneinanderliegen, gilt dasselbe von den homologen Elementen; so oft in der einen Figur zwei Ebenen in einer eigentlichen Geraden, oder eine Gerade und eine Ebene in einem eigentlichen Punkte sich schneiden, erfolgt dasselbe bei den homologen Elementen, und zwar können die Durchschnittslinien resp. Durchschnittspunkte als homologe Elemente hinzutreten.

Ueberhaupt kommt jede Eigenschaft von Elementen der einen Figur, welche sich nur auf das Aneinanderliegen der Elemente und die Anordnung von Punkten in Geraden bezieht, auch den homologen Elementen der congruenten Figur zu. Insbesondere wenn in der einen Figur zwei Paare von Geraden eines eigentlichen Büschels getrennt liegen, so gilt das Gleiche für die homologen Geraden.

Zu gegebenen congruenten Figuren, die aus eigentlichen Punkten bestehen, konnten eigentliche Geraden und Ebenen, welche jene Punkte verbinden, hinzugenommen werden. Aber der achte Grundsatz des § 13 gewährt auch die Möglichkeit, die Figuren durch beliebige eigentliche Punkte und in Folge dessen, wie sich zeigen

wird, überhaupt durch beliebige Elemente zu erweitern. Um nun beurtheilen zu können, wieweit dabei eine bestimmte Zuordnung von homologen Elementen eintritt, müssen einige Sätze eingeschaltet werden.

Wenn $fghik$ eigentliche Punkte sind, fgh nicht in gerader Linie, so sind die Figuren $fghi$ und $fghk$ nicht congruent. Zum Beweise nehme ich ausserhalb der Ebene fgh den eigentlichen Punkt l beliebig, von i verschieden; da die Ebenen fgl, fhl, ghl nur den Punkt l gemein haben, so wird mindestens eine von ihnen den Punkt i nicht enthalten, etwa die Ebene fgl. Wären nun die Figuren $fghi$ und $fghk$ congruent, so könnte man den eigentlichen Punkt m so angeben, dass $fghil$ und $fghkm$, mithin auch $fghl$ und $fghm$ congruent sind, und da dann $fghm$ so wenig wie $fghl$ in einer Ebene liegen, so könnte (X. Grundsatz in § 13) m von l nicht verschieden sein; es wären also die Figuren $fgil$ und $fgkl$ keine Planfiguren und dennoch congruent, im Widerspruch mit demselben Grundsatze.

Wenn $abcdfghik$ eigentliche Punkte sind, abc nicht in gerader Linie, $abcd$ und $fghi$ congruente Figuren, so sind die Figuren $abcd$ und $fghk$ nicht congruent. Denn es liegen dann auch fgh nicht in gerader Linie; wären nun $abcd$ und $fghk$ congruent, so wären es (VII. Grundsatz in § 13) auch $fghi$ und $fghk$, im Widerspruch zum vorigen Satze.

Die aus eigentlichen Punkten bestehenden Figuren $abcd$, $fghi$ und $fghk$ können also nur dann unter einander congruent sein, wenn entweder i und k zusammenfallen oder abc in einer Geraden liegen.

Dies vorangeschickt, seien F und F' zwei congruente Figuren, und zwar werde vorausgesetzt, dass in der Figur F drei nicht in gerader Linie gelegene (eigentliche) Punkte abc vorkommen; die homologen Punkte $a'b'c'$ in der Figur F' sind dann auch nicht in gerader Linie gelegen. Wird mit d irgend ein eigentlicher Punkt (von abc verschieden) bezeichnet, so gehört entweder d zur Figur F — und dann sei d' der homologe Punkt der Figur F' — oder man kann d zu F hinzufügen und F' um einen eigentlichen Punkt d' so erweitern, dass wieder congruente Figuren entstehen. In beiden Fällen sind die Figuren $abcd$ und $a'b'c'd'$ congruent; folglich ist d' durch $abcd\,a'b'c'$ oder durch d und die zwischen den Figuren F, F' gegebene Beziehung (Congruenz) bestimmt. Wenn wir daher sagen: d und d' sind homologe Punkte bei der zwischen F und F' gegebenen Congruenz, so ist zu jedem eigentlichen Punkte ein und nur ein homologer eigentlicher Punkt vorhanden. Wird nun weiter mit g irgend eine eigentliche Gerade bezeichnet, sie mag zur Figur F gehören oder nicht, und sind ef

eigentliche Punkte von g, $e'f'$ die homologen Punkte, g' deren Verbindungslinie, so ist g' durch g völlig bestimmt, und wir sagen: g und g' sind homologe Geraden bei der gegebenen Congruenz. Wird endlich mit P irgend eine eigentliche Ebene bezeichnet, und sind in ihr hik drei eigentliche Punkte, nicht in gerader Linie, $h'i'k'$ die homologen Punkte, P' deren Ebene, so ist auch P' durch P bestimmt, und wir nennen die Ebenen PP' homolog bei der Congruenz FF'. Vermöge dieser Congruenz wird also jeder nur aus eigentlichen Punkten, Geraden und Ebenen bestehenden Figur eine völlig bestimmte Figur, nämlich die aus den homologen Elementen zusammengesetzte, als homologe entsprechen, und je zwei homologe Figuren werden congruent sein. Zur Begründung eines solchen Entsprechens sind zwei congruente Figuren von der Beschaffenheit wie abc und $a'b'c'$ genügend.

Aber das Entsprechen bleibt nicht auf eigentliche Elemente beschränkt. Es sei d ein beliebiger Punkt; man wähle irgend zwei durch ihn gehende eigentliche Geraden lm, bestimme die homologen Geraden $l'm'$ und bezeichne den Punkt $l'm'$ mit d'. Dann ist unter Festhaltung der Congruenz FF' der Punkt d' durch d bestimmt, da zu einem Strahlenbündel als homologe Figur ein Strahlenbündel gehört. Wir nennen d und d' homologe Punkte; es ist dann jedem Punkte ein und nur ein homologer Punkt zuzuordnen, und wenn der eine von zwei solchen Punkten ein eigentlicher Punkt ist, so ist es auch der andere.

Wird jetzt in einer eigentlichen Geraden oder Ebene ein beliebiger Punkt angenommen, so liegt der homologe Punkt in der homologen Geraden oder Ebene. Punkten auf einer beliebigen Geraden oder auf einer beliebigen Ebene entsprechen ebensolche Punkte. Getrennten Punktpaaren auf einer Geraden ensprechen ebensolche Punktpaare.

Somit unterliegt es keiner Schwierigkeit, auch jeder Geraden eine bestimmte homologe Gerade und jeder Ebene eine bestimmte homologe Ebene zuzuordnen. Dadurch aber erhält man zu jeder (aus beliebigen Punkten, Geraden und Ebenen bestehenden) Figur eine bestimmte homologe Figur, und wenn wir je zwei solche Figuren congruent nennen, so gelten folgende Sätze:

1. Congruente Figuren haben alle graphischen Eigenschaften gemein.

2. Wenn zwei Figuren congruent sind, so sind auch ihre homologen Theile congruent.

Jede Figur ist sich selbst congruent. Zwei Punkte werden allemal zu den congruenten Figuren gerechnet.

3. Wenn zwei Figuren einer dritten congruent sind, so sind sie einander congruent.

Sobald also in der einen von zwei congruenten Figuren congruente Theile vorkommen, so sind auch die homologen Theile der andern Figur congruent.

4. Bei congruenten Figuren ist jedem eigentlichen Punkte der einen ein eigentlicher Punkt der andern zugeordnet, mithin jedem eigentlichen Elemente der einen ein eigentliches der andern.

5. Wird von zwei congruenten Figuren die eine um beliebige Elemente erweitert, so kann man die andere so erweitern, dass wieder congruente Figuren entstehen.

Auch eine solche Erweiterung werden wir zu den „Constructionen" rechnen.

6. Haben zwei congruente Figuren drei eigentliche Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, entsprechend gemein, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein.

7. Haben zwei congruente gerade Punktreihen zwei eigentliche Punkte entsprechend gemein, so haben sie alle Punkte entsprechend gemein.

Beweis. — Es seien cc' zwei homologe beliebige Punkte in congruenten geraden Punktreihen, welche die eigentlichen Punkte ab entsprechend gemein haben, ferner d der vierte harmonische Punkt zu abc, d' der homologe Punkt, also auch $abc'd'$ harmonisch. Ist c ein eigentlicher Punkt zwischen a und b, also im Schenkel ab, so liegt auch c' im Schenkel ab und ist mithin von c nicht verschieden. Bei anderer Lage von c ist d ein eigentlicher Punkt zwischen a und b und fällt demnach mit d' zusammen, so dass wieder c und c' identisch sind.

Der erste, vierte und fünfte*) Grundsatz des § 13 sind bisher noch nicht zur Anwendung gekommen. Nach dem ersten Grundsatze sind die Figuren AB und BA, wo A und B eigentliche Punkte bedeuten sollen, congruent. Die Strecke AB kann also über B hinaus bis zum eigentlichen Punkte C derart verlängert werden, dass BA und BC, mithin AB, BA, BC und CB congruente Figuren sind. Alsdann wird B die Mitte der Strecke AC (oder CA) genannt, und kein anderer eigentlicher Punkt b der Geraden AC besitzt die Eigenschaft, congruente Strecken bA und bC zu liefern. In der That sind die Figuren AC und CA congruent, und man kann B' angeben, so dass ACB und CAB' con-

A B C

*) Der vierte wird in § 15, der fünfte in § 19 gebraucht.

gruent sind; dann ist aber B' mit B im Schenkel AC gelegen und AB' mit AB congruent, B' mit B identisch. Also sind die Figuren ABC und CBA congruent. Wären noch die Strecken bA und bC congruent, also b in der Strecke AC gelegen, so wären auch die Figuren $ABCb$ und $CBAb$ congruent, im Widerspruch mit Satz 7. Wenn wir aber unter D den vierten harmonischen Punkt zu ACB verstehen und D' so einführen, dass $ACBD$ und $CABD'$ congruent sind, so muss das Gebilde $CABD'$ harmonisch, D' mit D identisch und $ABCD$ mit $CBAD$ congruent sein. Man schliesst daraus, dass D kein eigentlicher Punkt sein kann. Sucht man zu den beiden Endpunkten und der Mitte einer Strecke den vierten harmonischen Punkt, so wird man zu einem uneigentlichen Punkte geführt.

In jeder Strecke fg ist eine Mitte vorhanden, deren Construction sich aus den bisherigen Sätzen ergiebt. Wird nämlich ausserhalb der Geraden fg ein eigentlicher Punkt c beliebig angenommen, so existirt in der Ebene cfg ein bestimmter eigentlicher Punkt d, welcher mit c auf derselben Seite der Geraden fg liegt und congruente Figuren fgc und fgd liefert; bei geeigneter Wahl des Punktes c wird d von c verschieden ausfallen. Die Congruenz, bei welcher fg, gf, cd Paare von homologen Punkten sind, lässt sich auf jedes andere Element und zwar nur in bestimmter Weise ausdehnen. Die Ebene cfg und die Gerade fg entsprechen sich selbst. Sollen demnach dd' homologe Punkte sein, also die Figuren fgc, gfd, fgd' congruent, so muss d' in der Ebene cfg liegen, aber d und d' (mithin c und d') nicht auf verschiedenen Seiten der Geraden fg, d. h. es müssen c und d' zusammenfallen. Wir haben somit noch dc als homologe Punkte, $cf\,dg$, $dg\,cf$, $cg\,df$, $df\,cg$ als Paare von homologen Geraden, während die Gerade cd sich selbst entspricht. Da die Schenkel fc und fd auf derselben Seite der Geraden fg liegen, so liegt entweder der Schenkel fd zwischen den Schenkeln fc und fg oder (der Schenkel fc zwischen den Schenkeln fd und fg und im letzteren Falle) der Schenkel gd zwischen den Schenkeln gc und gf. Es mag das erstere zutreffen; dann schneiden sich cg und df in einem eigentlichen Punkte a, der sich selbst entspricht und zu den Strecken cg und df gehört; zugleich ist ersichtlich, dass die Schenkel fd und fg auf derselben Seite der Geraden cf liegen. Bisher sind nur

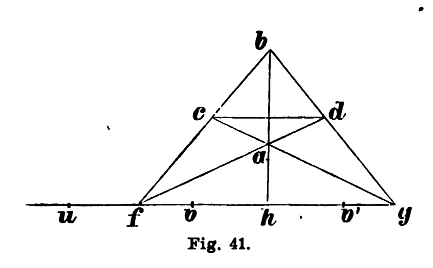


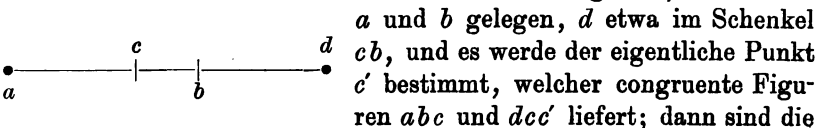
Fig. 41.

eigentliche Elemente vorgekommen; die Geraden *cf* und *dg* haben jedoch einen Punkt *b* gemein, welcher kein eigentlicher zu sein braucht. Der Punkt *b* und mithin die Gerade *ab* entsprechen sich selbst. Es befinden sich *d* und *f* auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, *d* und *g* auf derselben Seite, also *f* und *g* auf verschiedenen Seiten; folglich begegnen sich *ab* und *fg* in einem eigentlichen Punkte *h*. Auch dieser Punkt ist sich selbst homolog; also ist er die Mitte der Strecke *fg*.

Noch ein sich selbst homologer Punkt in der Geraden *fg* ist vorhanden, aber ein uneigentlicher Punkt, nämlich der Durchschnittspunkt *k* der Geraden *cd* und *fg*, der vierte harmonische Punkt zu *fgh*. In der Geraden *ab* entspricht jeder Punkt sich selbst. Ausser dem Punkte *k* und den Punkten der Geraden *ab* treten keine sich selbst homologen Punkte auf.

Die Punkte *fg* werden durh *hk* harmonisch getrennt. Werden sie durch *uv* ebenfalls harmonisch getrennt, und gehört etwa *v* zur Strecke *fg*, so werden entweder *fk* durch *gu* oder *gk* durch *fu* getrennt. Wenn *fk* und *gu* getrennt liegen, so sind (§ 11 Seite 90) auch *fh* durch *gv* getrennt, d. h. *v* ein Punkt der Strecke *fh*; alsdann gehört der homologe Punkt *v'* zur Strecke *gh*, und ein Theil (§ 1, Definition 1 und Lehrsatz 2) der Strecke *gv*, nämlich *gv'*, ist *fv* congruent. *Wenn die eigentlichen Punkte fguv harmonisch sind, f zwischen u und g gelegen, so ist die Strecke fv kleiner als gv.*

Von zwei Strecken heisst nämlich die eine kleiner als die andere, wenn jene einem Theile der letzteren congruent ist. In einer Geraden seien die Strecken *ab* und *cd* congruent, *c* zwischen *a* und *b* gelegen, *d* etwa im Schenkel *cb*, und es werde der eigentliche Punkt *c'* bestimmt, welcher congruente Figuren *abc* und *dcc'* liefert; dann sind die Strecken *cb* und *cc'* congruent, *c'* liegt zwischen *c* und *d*, also im Schenkel *cb*; folglich fällt *b* mit *c'* zusammen, zwischen *c* und *d*. Damit ist bewiesen, dass keine Strecke einem ihrer Theile congruent ist. Sind also zwei Strecken *ab* und *cd* beliebig gegeben, so ist *ab* entweder *cd* congruent, oder kleiner als *cd* (*cd* grösser als *ab*), oder grösser als *cd*, und zwar schliesst jede dieser Möglichkeiten die beiden anderen aus.



Wenn die Strecke I kleiner oder grösser ist als die Strecke II, so ist sie auch kleiner resp. grösser als jede mit II congruente Strecke. Wenn die Strecke I kleiner ist als die Strecke II, diese kleiner als die Strecke III, so ist I kleiner als III. Wenn die Strecke I

aus den Theilen 1 und 2, die Stecke II aus den Theilen 3 und 4 besteht, und es ist 1 kleiner als 3, 2 nicht grösser als 4, so ist I kleiner als II.

§ 15. Herleitung einiger graphischen Sätze.

Die Lehre von den congruenten Figuren wollen wir zunächst benutzen, um die Stammsätze der projectiven Geometrie zu vervollständigen. Dabei muss wieder die Bestimmung festgehalten werden, wonach alle in die Betrachtung eingehenden Elemente eine Figur bilden.

In einer Geraden seien vier eigentliche Punkte AB_0B_1P gegeben, B_1 zwischen A und P, B_0 zwischen A und B_1. Aus AB_0B_1 werden neue Punkte $B_2B_3B_4 \ldots$ durch Construction gewonnen, und zwar sollen $AB_1B_0B_2$, $AB_2B_1B_3$, $AB_3B_2B_4$, ... harmonische Gebilde sein. Ferner werde die Strecke B_0B_1 um die congruente Strecke B_1C_2 verlängert, diese um die congruente Strecke C_2C_3, diese um die congruente Strecke C_3C_4 u. s. f. Wenn B_2 zur Strecke AP gehört (also zur Strecke B_1P), so ist B_1B_2 grösser als B_0B_1,

d. i. grösser als B_1C_2, also AB_2 grösser als AC_2. Wenn auch B_3 zur Strecke AP gehört (also zur Strecke B_2P), so ist B_2B_3 grösser als B_1B_2, mithin grösser als C_2C_3, also AB_3 grösser als AC_3. Wenn auch B_4 zur Strecke AP gehört (also zur Strecke B_3P), so ist B_3B_4 grösser als B_2B_3, mithin grösser als C_3C_4, also AB_4 grösser als AC_4, u. s. f. Nun giebt es (IV. Grundsatz in § 13) in der Reihe der Strecken B_1C_2, C_2C_3, ... eine bestimmte C_nC_{n+1}, welche den Punkt P enthält (nöthigenfalls ist B_1 für C_1 zu nehmen). Folglich giebt es in der Reihe der Punkte $B_2B_3B_4 \ldots$ einen bestimmten $B_{\lambda+1}$, dem nur Punkte der Strecke AP vorangehen, während er selbst zur Strecke AP nicht gehört; B_λ fällt dann entweder mit P zusammen oder wird von $B_{\lambda+1}$ durch A und P getrennt.

Diese Betrachtung lässt sich derart verallgemeinern, dass sie in jeder Geraden möglich wird. Sind AB_0B_1 beliebige Punkte in einer Geraden, so lässt sich aus ihnen eine gewisse Reihe von Punkten $B_2B_3B_4 \ldots$ durch Construction gewinnen; es sollen nämlich $AB_1B_0B_2$, $AB_2B_1B_3$, $AB_3B_2B_4$, ... harmonische Gebilde

sein. Auf eine solche Figur mag der Ausdruck Netz*) angewendet werden, und zwar wollen wir B_1 den ersten Punkt des Netzes nennen, B_2 den zweiten u. s. w., A den Grenzpunkt, B_0 den Nullpunkt. Das Netz ist durch seinen Grenzpunkt, Nullpunkt und ersten Punkt bestimmt, so dass es erlaubt sein wird, vom „Netze AB_0B_1" zu sprechen. — Da bei ausgeschlossenem A der Punkt B_1 zwischen B_0 und B_2, B_2 zwischen B_1 und B_3, B_3 zwischen B_2 und B_4 u. s. w., folglich B_1 und B_2 zwischen B_0 und B_3, B_2 und B_3 zwischen B_1 und B_4, $B_1B_2B_3$ zwischen B_0 und B_4, überhaupt $B_1B_2\,..\,B_{\lambda-1}$ zwischen B_0 und B_λ liegen, so kann B_λ mit keinem der Punkte $AB_0B_1\,..\,B_{\lambda-1}$ zusammenfallen. *Die Punkte des Netzes sind vom Grenzpunkte und von einander verschieden.*

Wird eine gerade Punktreihe $AB_0B_1B_\lambda$ nach $ab_0b_1b_\lambda$ projicirt, und ist B_λ der λ^{te} Punkt des Netzes AB_0B_1, so ist auch b_λ der λ^{te} Punkt des Netzes ab_0b_1.

Wir können dies anwenden, wenn in einer Geraden f drei Punkte AB_0B_n gegeben sind und B_1 so gesucht wird, dass B_n sich als n^{ter} Punkt des Netzes AB_0B_1 ergiebt. Durch A wird die Gerade g beliebig gezogen, in ihr der Punkt α, in der Geraden $B_0\alpha$ der Punkt P_1 angenommen, P_n als n^{ter} Punkt des Netzes AB_0P_1 construirt, B_n aus P_n auf g nach β und endlich β aus P_1 auf f nach B_1 projicirt; *B_1 ist eindeutig bestimmt.*

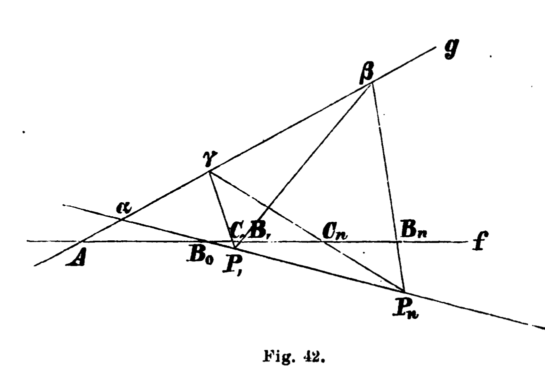


Fig. 42.

Ist in der Geraden f ausserdem noch C_n gegeben und C_1 so gesucht, dass der n^{te} Punkt des Netzes AB_0C_1 nach C_n fällt, so projicire man C_n aus P_n auf g nach γ, und γ aus P_1 auf f nach C_1. Man bemerkt dann noch, dass sich $AB_0B_nC_n$ aus P_n nach $A\alpha\beta\gamma$, diese aus P_1 nach $AB_0B_1C_1$ projiciren. *Werden also AC_n durch B_0B_n getrennt, so werden auch AC_1 durch B_0B_1 getrennt.*

Es seien jetzt vier beliebige Punkte AB_0B_1P in einer Geraden f angenommen, und zwar AB_1 durch B_0P getrennt. Man

---

*) Im Anschluss an Möbius, der barycentrische Calcül, zweiter Abschnitt, sechstes Capitel.

kann sie stets aus einem eigentlichen Punkte S nach eigentlichen Punkten $a b_0 b_1 p$ derart projiciren, dass b_1 zwischen a und p, b_0 zwischen a und b_1 zu liegen kommt, und alsdann die positive ganze Zahl n so angeben, dass der n^{te} Punkt b_n des Netzes $a b_0 b_1$ entweder mit p zusammenfällt oder vom $(n+1)^{ten}$ b_{n+1} durch a und p getrennt wird. Werden b_n und b_{n+1} aus S auf die Gerade AP nach B_n und B_{n+1} projicirt, so ist B_n der n^{te}, B_{n+1} der $(n+1)^{te}$ Punkt des Netzes AB_0B_1.

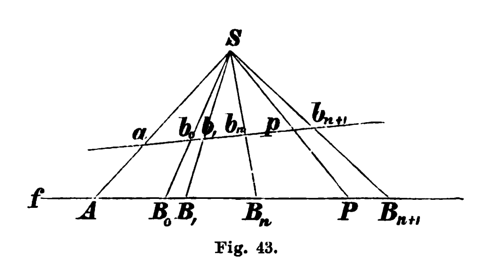


Fig. 43.

Werden in einer Geraden die Punkte AB_1 durch B_0P getrennt, so kann man die positive ganze Zahl n so angeben, dass der n^{te} Punkt des Netzes AB_0B_1 entweder mit P zusammenfällt oder vom $(n+1)^{ten}$ durch A und P getrennt wird. Es werden dann auch B_0B_{n+1} durch AP getrennt.

Dies ist ein graphisches Theorem, bei dessen Beweise der Begriff der Congruenz benutzt worden ist. Indem wir es mit anderen und zwar nur mit graphischen Theoremen verbinden, gelangen wir zu den graphischen Sätzen, um die es sich jetzt noch handelt.

Zuerst werde die Construction des Netzes AB_0B_1 in der Geraden f näher erörtert. Durch A ziehen wir eine Gerade g und

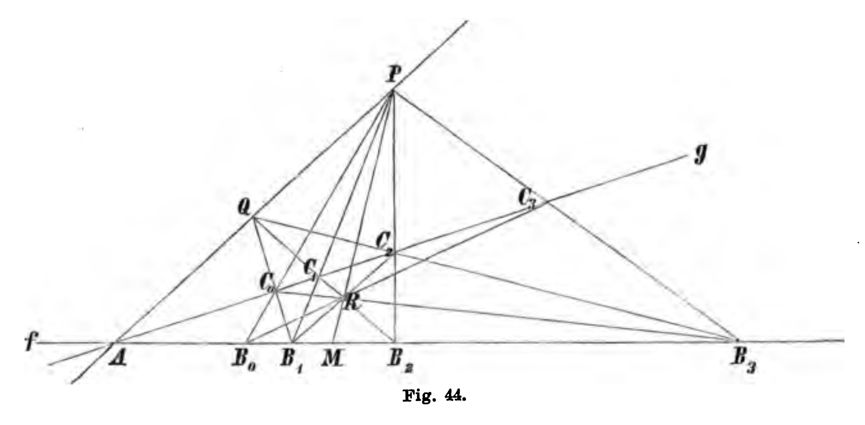


Fig. 44.

nehmen den Punkt P in der Ebene fg beliebig, ausserhalb f und g. Aus P mögen B_0B_1 auf g nach C_0C_1 projicirt werden, die Geraden AP und B_1C_0 mögen sich in Q begegnen, und aus Q werde C_1 auf f

nach B_2 projicirt; dann sind die Punkte $AB_1B_0B_2$ harmonisch, also B_2 der zweite Punkt des Netzes AB_0B_1. Wird B_2 aus P auf g nach C_2, sodann C_2 aus Q auf f nach B_3 projicirt, so ist B_3 der dritte Punkt des Netzes. Wenn überhaupt B_n, der n^{te} Punkt des Netzes AB_0B_1, aus P auf g nach C_n, sodann C_n aus Q auf f nach B_{n+1} projicirt wird, so ist B_{n+1} der $(n+1)^{te}$ Punkt.

Der Durchschnittspunkt der Geraden C_1B_2 und C_2B_1 werde mit R, der der Geraden f und PR mit M bezeichnet. Da $AB_2B_1B_3$ und $AC_1C_2C_0$ harmonische Gebilde sind, so wird B_3 aus R auf g nach C_0 projicirt, d. h. die Gerade C_0B_3 geht durch R. Da $AB_1B_2B_0$ und $AC_2C_1C_3$ harmonische Gebilde sind, so geht die Gerade B_0C_3 ebenfalls durch R. Folglich werden nicht bloss die Punkte B_1B_2, sondern auch die Punkte B_0B_3 durch AM harmonisch getrennt. Zu den Punkten B_1B_2A und B_0B_3A gehört derselbe vierte harmonische Punkt.

Hieran mag die Erklärung eines allgemeineren Begriffes angeknüpft werden, auf welchen der des Netzes sich zurückführen lässt. Wenn nämlich $Abcb'c'$ Punkte in einer Geraden sind und zu $bc'A$ derselbe vierte harmonische Punkt M wie zu $cb'A$ gehört, so will ich sagen, die Paare bc und $b'c'$ seien äquivalent für den Grenzpunkt A. Dabei sollen $bcb'c'$ von A verschieden sein; dagegen brauchen sie nicht unter sich verschieden zu sein, und zwar ist, wenn b' mit c zusammenfällt, c für M zu nehmen, ebenso b, wenn c' mit b zusammenfällt. — *Sind bc und $b'c'$ für irgend einen Punkt äquivalent, so werden bc' durch cb' nicht getrennt* (§ 11 Seite 90).

Bei Festhaltung des Grenzpunktes folgt sofort: Jedes Paar bc ist sich selbst äquivalent; sind die Paare bc und $b'c'$ äquivalent, so sind es auch $b'c'$ und bc, cb und $c'b'$, bb' und cc' u. s. w.; und wenn dann b mit c zusammenfällt, so kann auch b' nicht von c' verschieden sein.

Der Begriff der äquivalenten Paare lässt sich, ebenso wie der des Netzes, auf Strahlenbüschel und Ebenenbüschel übertragen. Beides sind graphische Begriffe und sich selbst reciprok. Wenn sie in der einen von zwei perspectiven Figuren anwendbar sind, so lassen sie sich auch auf die homologen Elemente der andern Figur anwenden.

Es seien in einer Geraden f die Paare bc und $b'c'$ äquivalent für den Grenzpunkt A, d. h. ein Punkt M vierter harmonischer Punkt zu $bc'A$ und $cb'A$ (oder M mit c identisch, wenn b' in c fällt u. s. w.). Durch A werde noch eine Gerade g gezogen, der Punkt P in der Ebene fg ausserhalb f und g angenommen, $bcb'c'M$ aus P auf g nach $\beta\gamma\beta'\gamma'\mu$ projicirt, und endlich der vierte harmo-

nische Punkt zu $M\mu P$ mit R bezeichnet. Alsdann müssen $b\gamma'$ und $\beta c'$, ebenso $c\beta'$ und $b'\gamma$ im Punkte R sich begegnen. Schneiden sich

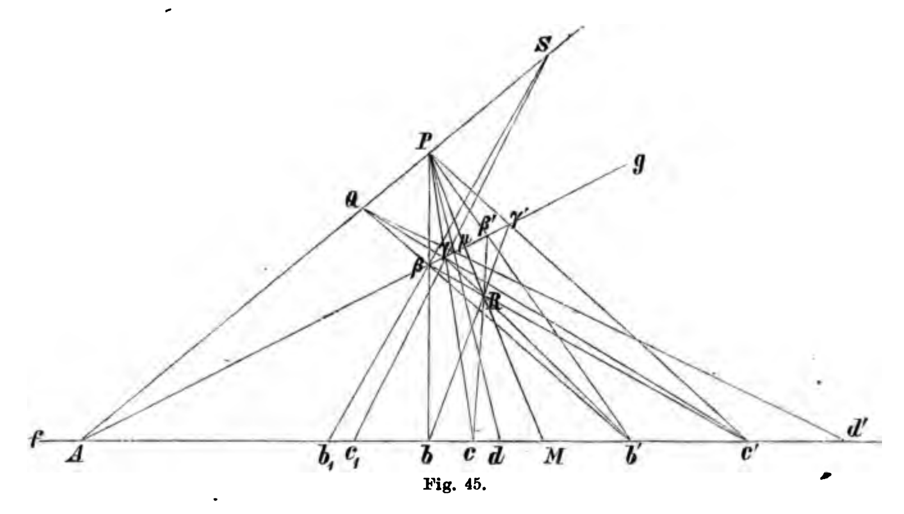


Fig. 45.

nun die Geraden $b'\beta$ und $c'\gamma$ (vorausgesetzt dass sie verschieden sind) in Q, so sind die Strahlen f, g, AR, AQ harmonisch, aber auch die Strahlen f, g, AR, AP, also AP und AQ identisch. Demnach haben die Geraden $b'\beta$ und $c'\gamma$ stets einen Punkt Q der Geraden AP mit einander gemein.

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass $Abcb'c'$ durch wiederholte Projection nach $Ac'b'cb$ übergeführt werden können; es werden $Abcb'c'$ aus P nach $A\beta\gamma\beta'\gamma'$, diese aus R nach $Ac'b'cb$ projicirt. *Sind also in einer Geraden die Paare bc und $b'c'$ äquivalent für den Grenzpunkt A und werden bc' durch Ab' getrennt, so werden bc' auch durch Ac getrennt.* Ausserdem erhalten wir folgende Construction des Punktes c', wenn in einer Geraden f die Punkte $Abcb'$ gegeben sind und die Paare bc, $b'c'$ für A äquivalent werden sollen. Man ziehe nämlich durch A noch eine Gerade g, nehme in der Ebene fg den Punkt P ausserhalb f und g beliebig, projicire bc aus P auf g nach $\beta\gamma$, β aus b' auf AP nach Q, endlich γ aus Q auf f nach c'. Der Punkt c' ist somit stets vorhanden und völlig bestimmt.

Treten nun in der Geraden f noch die Punkte d und d' so hinzu, dass auch die Paare cd und $c'd'$ für A äquivalent sind, so begegnen sich die Strahlen Pd und Qd' auf der Geraden g, etwa in δ, und folglich sind auch die Paare bd und $b'd'$ äquivalent. Aus P werden $Abcd$ nach $A\beta\gamma\delta$, diese aus Q nach $Ab'c'd'$ projicirt. *Wenn also in einer Geraden die Paare bc und $b'c'$ für den Grenz-*

punkt A *äquivalent sind, ebenso die Paare* cd *und* $c'd'$, *so sind es auch die Paare* bd *und* $b'd'$; man kann dann $Abcd$ durch wiederholte Projection nach $Ab'c'd'$ überführen, *und wenn* bc *durch* Ad *getrennt werden, so werden auch* $b'c'$ *durch* Ad' *getrennt.*

Sind in einer Geraden f *die Paare* bc *und* $b'c'$ *äquivalent für den Grenzpunkt* A, *ebenso die Paare* bc *und* b_1c_1, *so sind es auch die Paare* $b'c'$ *und* b_1c_1. Denn zieht man durch A die Gerade g beliebig, nimmt den Punkt P in der Ebene fg (ausserhalb f und g) und projicirt bc aus P auf g nach $\beta\gamma$, so treffen sich die Strahlen $b'\beta$ und $c'\gamma$ in einem Punkte Q der Geraden AP, ebenso die Strahlen $b_1\beta$ und $c_1\gamma$ in einem Punkte S dieser Geraden. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Auf den Begriff der Aequivalenz lässt sich der des Netzes folgendermassen zurückführen. Wählen wir z. B. ein Netz in einer Geraden, A als Grenzpunkt, B_0 als Nullpunkt, B_1 als ersten Punkt; nennen wir B_2 den zweiten Punkt u. s. w. Dann sind B_0B_1 und B_1B_2 äquivalente Paare für A, ebenso B_1B_2 und B_2B_3 u. s. f. Dadurch werden die Punkte $B_2B_3\ldots$ unter Festhaltung von AB_0B_1 vollkommen bestimmt. Nach dem vorigen Satze sind die Paare $B_\lambda B_{\lambda+1}$ und $B_\mu B_{\mu+1}$ äquivalent für den Grenzpunkt A, wenn λ und μ beliebige (nicht negative) ganze Zahlen sind.

Die vorstehenden Sätze sind gesammelt worden, um einen zur Begründung der projectiven Geometrie unentbehrlichen Satz zu beweisen. Die Frage, um die es sich handelt, tritt auf, wenn vier Punkte $ABCD$ in einer Geraden wiederholt projicirt werden, bis man in jene Gerade zurückgelangt. Es kann dabei vorkommen, dass die letzten Projectionen von drei gegebenen Punkten mit diesen selbst zusammenfallen; dann gilt vom vierten Punkte dasselbe, wie jetzt bewiesen werden soll.

Ich setze also voraus, dass $ABCD$ durch wiederholte Projection nach $ABCE$ übergeführt worden sind, und habe zu zeigen, dass D mit E zusammenfällt.

Zu dem Ende werde die Annahme, dass D von E verschieden sei, geprüft. Bei geeigneter Bezeichnungsweise werden AC durch BD und mithin auch durch BE getrennt. Bei ausgeschlossenem B liegen dann D und E zwischen A und C, folglich entweder D zwischen

F C_1 C_λ $C_{\lambda+1}$

A B G B_1 C B_n D E

A und E oder E zwischen A und D; es mag das letztere stattfinden, d. h. AD durch BE getrennt sein, folglich auch AD und BD durch CE. Man mache nun das Paar BB_1 dem Paare DE für

den Grenzpunkt A äquivalent; dann sind BE durch AB_1 getrennt, aber AB nicht durch B_1C. Construirt man also das Netz ABB_1, so gelangt man jedenfalls zu einem Punkte B_n (n ist eine positive ganze Zahl und kann 1 sein), der von B durch AC getrennt wird; man kann dann weiter den Punkt C_1 so bestimmen, dass C als n^{ter} Punkt des Netzes ABC_1 herauskommt (C_1 kann mit C zusammenfallen); dabei werden AC_1 durch BB_1 getrennt, ferner (wenn C von C_1 verschieden) AC_1 durch BC, folglich jedenfalls auch AC_1 durch BD. Jetzt werde das Netz ABC_1 so weit verfolgt, bis einer seiner Punkte C_λ mit D zusammenfällt oder von $C_{\lambda+1}$ durch A und D getrennt wird, wobei die Paare BC_1 und $C_\lambda C_{\lambda+1}$ für den Grenzpunkt A äquivalent sind; endlich mache man für denselben Grenzpunkt die Paare BF und GC_1 dem Paare $C_\lambda D$ äquivalent. (Ist C_λ nicht von D verschieden, so fällt F mit B, G mit C_1 zusammen.) Wie die vorangeschickten Sätze lehren, sind auch die Paare FC_1 und $DC_{\lambda+1}$ äquivalent, ferner BG und FC_1, folglich BG und $DC_{\lambda+1}$; überdies werden (wenn C_λ von D verschieden) BC_1 durch AF und mithin durch AG getrennt; folglich jedenfalls BB_1 durch AG und weiter DE durch $AC_{\lambda+1}$. Daraus folgt aber, dass AD durch $BC_{\lambda+1}$, $AC_{\lambda+1}$ durch BE getrennt werden. Wenn man nun die Projectionen, denen nach unserer Voraussetzung die Punkte $ABCD$ unterworfen wurden, auf das Gebilde $ABCDC_1C_{\lambda+1}$ ausdehnt, so gelangt man in die gegebene Gerade zurück, und zwar entsprechen die Punkte ABC sich selbst, demnach auch die Punkte $C_1C_{\lambda+1}$, während D als von dem entsprechenden Punkte E verschieden angenommen war. Der Annahme zufolge würden daher $BC_{\lambda+1}$, welche nach dem Vorigen durch AD getrennt werden, auch durch AE und zugleich $AC_{\lambda+1}$ durch BE getrennt werden, woraus sich die Unzulässigkeit der Annahme ergiebt.

Das vorstehende Beweisverfahren lässt sich leicht auch auf folgenden Satz anwenden: *Wenn die Gebilde $ABCD$ und $ABCE$ je aus vier verschiedenen Elementen einer Punktreihe oder eines Strahlenbüschels oder eines Ebenenbüschels bestehen und alle graphischen Eigenschaften gemein haben, so fällt D mit E zusammen.*

Drei Punkte ABC, welche in einer Geraden beliebig gegeben sind, können allemal nach drei Punkten $\alpha\beta\gamma$, welche in derselben oder in einer andern Geraden beliebig gegeben sind, durch ein- oder mehrmalige Projection übertragen werden. Sind nämlich die Geraden AB und $\alpha\beta$ von einander verschieden, aber ABC und $\alpha\beta\gamma$ nicht perspectiv, auch etwa α nicht in AB gelegen, so ziehe man durch α eine Gerade, welche AB schneidet (nicht in A), und projicire ABC aus einem Punkte $A\alpha$ auf diese Gerade nach $\alpha B'C'$; die

Punktreihen $\alpha B' C'$ und $\alpha\beta\gamma$ sind alsdann perspectiv. Fallen die Geraden AB und $\alpha\beta$ zusammen, und ist abc irgend eine Projection von ABC, so kann man von abc zu $\alpha\beta\gamma$ durch eine oder zwei Projectionen gelangen.

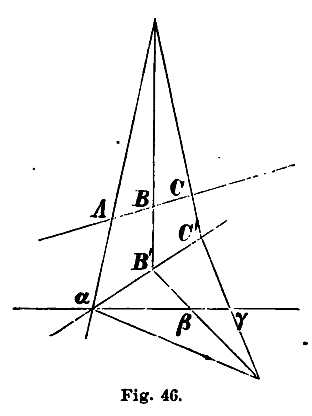


Fig. 46.

Wenn $ABCD$ vier verschiedene Punkte in einer Geraden sind, ebenso $\alpha\beta\gamma\delta$, und die Gebilde $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ haben alle graphischen Eigenschaften gemein, so kann man von einem zum andern durch eine oder mehrere Projectionen gelangen. Denn die Punkte $\alpha\beta\gamma$ kann man durch ein- oder mehrmalige Projection nach ABC überführen. Wendet man dieselben Projectionen zugleich auf δ an, so mag sich E ergeben. Wäre nun D von E verschieden, so könnte man C_1 und $C_{\lambda+1}$ wie vorhin construiren; es wäre C der n^{te}, $C_{\lambda+1}$ der $(\lambda+1)^{te}$ Punkt des Netzes ABC_1, $BC_{\lambda+1}$ durch AD, $AC_{\lambda+1}$ durch BE getrennt. Man führe noch γ_1 und $\gamma_{\lambda+1}$ derart ein, dass γ der n^{te} und $\gamma_{\lambda+1}$ der $(\lambda+1)^{te}$ Punkt des Netzes $\alpha\beta\gamma_1$ wird; es wären dann $\beta\gamma_{\lambda+1}$ durch $\alpha\delta$ getrennt, folglich auch $BC_{\lambda+1}$ durch AE, zugleich nach Obigem $AC_{\lambda+1}$ durch BE, was unmöglich ist.

Die Umkehrung dieses Satzes wird im 17ten Paragraphen bewiesen werden. —

Ueber die Frage, ob die neu erlangten graphischen Sätze auch ohne den Begriff der Congruenz bewiesen werden können, sei Folgendes bemerkt. Wir haben die Eigenschaften der congruenten Figuren benutzt, um den Satz zu beweisen: Sind in einer Geraden die eigentlichen Punkte AB_0B_1P gegeben, B_1 zwischen A und P, B_0 zwischen A und B_1, so kann man die positive ganze Zahl λ so angeben, dass dem $(\lambda+1)^{ten}$ Punkte des Netzes AB_0B_1 nur Punkte der Strecke AP vorangehen, während er selbst zur Strecke AP nicht gehört. Man könnte diesen Satz unabhängig vom Begriff der Congruenz herstellen, wenn man sich auf einen Grundsatz von folgendem Inhalte stützen wollte:

„Kann man in einer geraden Strecke AB Punkte $A_1A_2A_3\ldots$ in unbegrenzter Anzahl so herstellen, dass A_1 zwischen A und B, A_2 zwischen A_1 und B, A_3 zwischen A_2 und B liegt u. s. w., so

$A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad\quad C \quad\quad B$

existirt in jener Strecke ein Punkt C (welcher mit B zusammen-

fallen kann) derart, dass, wie auch der Punkt D in der Geraden AB zwischen A und C gelegen sein mag, nicht alle Punkte der Reihe $A_1 A_2 A_3 \ldots$ sich zwischen A und D befinden, während zwischen B und C sich kein Punkt der Reihe befindet."

Nehmen wir in der That die eigentlichen Punkte AB_0B_1P in einer Geraden, B_1 zwischen A und P, B_0 zwischen A und B_1, und construiren das Netz AB_0B_1. Es liegt B_0 zwischen A und P, B_1 zwischen B_0 und P. Wären die Punkte $B_2 B_3 \ldots$ des Netzes

$A \quad B_0 \quad B_1 \quad D \quad B_n \quad C \quad P$

AB_0B_1 sämmtlich Punkte der Strecke AP, so läge auch B_2 zwischen B_1 und P, B_3 zwischen B_2 und P u. s. w., und es wäre in der Strecke AP ein Punkt C (welcher mit P zusammenfallen kann) vorhanden, derart dass, wie auch der Punkt D in der Geraden AP zwischen A und C gelegen sein mag, nicht alle Punkte des Netzes zwischen A und D liegen, während zwischen C und P sich kein Punkt des Netzes befindet; den Punkt D kann ich so wählen, dass äquivalente Paare CD und B_1B_0 für den Grenzpunkt A entstehen, wobei CB_0 durch AB_1, mithin auch durch AD getrennt, d. h. D zwischen B_0 und C gelegen wäre. Zwischen C und D könnte man zwei aufeinanderfolgende Punkte B_n und B_{n+1} des Netzes AB_0B_1 annehmen; die Paare B_0B_1 und B_nB_{n+1} wären äquivalent für den Grenzpunkt A, ebenso B_0B_1 und DC, folglich auch DC und B_nB_{n+1}; ferner wären DB_{n+1} durch AB_n getrennt, folglich auch durch AC, d. h. C zwischen D und B_{n+1} gelegen, während doch B_{n+1} zwischen C und D liegen sollte.

Das Axiom, durch welches Herr F. Klein*) die Lücke in Staudt's Begründung der Projectivität**) ausfüllt, kommt auf den eben formulirten Satz hinaus. Diesen als Grundsatz anzunehmen, würde mit den hier festgehaltenen Anschauungen nicht im Einklang stehen. Denn abgesehen davon, dass eine Beobachtung sich überhaupt nicht auf unendlich viele Dinge beziehen kann, ist die Aufstellung jenes Satzes von unserem Standpunkte aus auch deshalb noch nicht zulässig, weil wir (vgl. Seite 18) in einer Strecke nicht unendlich viele Punkte annehmen dürfen, ohne dem Sinne des

*) Mathem. Ann. Bd. 6 S. 136, Bd. 7 S. 532; vgl. Cantor, ebendas. Bd. 5 S. 128; Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872) S. 18.

**) Staudt, Geometrie der Lage S. 50; vgl. Thomae, Gebilde erster und zweiter Ordnung S. 12; Reye, die Geometrie der Lage, Vorwort zur zweiten Auflage; F. Klein, Mathem. Ann. Bd. 6 S. 132, Bd. 7 S. 531, Bd. 17 S. 52; Darboux, ebendas. Bd. 17 S. 55; Schur, ebendas. Bd. 18 S. 252.

Wortes „Punkt“ eine weitere als die bisherige Ausdehnung zu geben und uns mithin von seiner ursprünglichen Bedeutung noch mehr zu entfernen. Eine solche Ausdehnung wird erforderlich, wenn man die Punkte der Geraden in vollständige Analogie mit den Gliedern der aus den rationalen und irrationalen reellen Zahlen bestehenden Reihe bringen will; sie erfolgt dann durch eine geeignete Definition, an welche sich jener Satz als Theorem anschliesst*).

§ 16. Projective einförmige Gebilde.

In § 12 haben wir gesehen, dass alle graphischen Sätze, welche auf dem damaligen Standpunkte überhaupt erreichbar waren, sich aus den graphischen Sätzen der §§ 7—9 deduciren lassen. Für den dadurch abgegrenzten Theil der graphischen Geometrie konnten wir die drei Reciprocitätsgesetze aus dem Umstande folgern, dass die Worte „Punkt“ und „Ebene“ in den Stammsätzen vertauscht werden dürfen.

Ueber dieses Gebiet hat der vorige Paragraph hinausgeführt und gestattet uns, zwei weitere Sätze zu jener Gruppe hinzuzufügen, nämlich: Werden in einer Geraden die Punkte AB_1 durch B_0P getrennt, so kann man die positive ganze Zahl n so angeben, dass der n^{te} Punkt des Netzes AB_0B_1 entweder mit P zusammenfällt oder vom $(n+1)^{ten}$ durch A und P getrennt wird; und: Werden in einem Ebenenbüschel die Ebenen AB_1 durch B_0P getrennt, so kann man die positive ganze Zahl n so angeben, dass die n^{te} Ebene des Netzes AB_0B_1 entweder mit P zusammenfällt oder von der $(n+1)^{ten}$ durch A und P getrennt wird. Die erweiterte Gruppe behält die Eigenschaft, dass „Punkt“ und „Ebene“ vertauschbar sind, und da wir im Folgenden die graphische Geometrie nicht weiter führen werden, als dies mit Hülfe der so vermehrten Stammsätze geschehen kann, so ist für unsere Zwecke die Reciprocität zwischen den Punkten und Ebenen schon jetzt genügend erwiesen, mithin auch die Reciprocität zwischen den Punkten und Geraden an einer Ebene und zwischen den Geraden und Ebenen an einem Punkte. Die drei Dualitätsgesetze lassen sich also ohne Weiteres auf alle graphischen Sätze des vorigen Paragraphen anwenden; doch ist es überflüssig, die sich ergebenden reciproken Sätze noch besonders anzuführen. —

Wir haben zuletzt gerade Punktreihen betrachtet, welche durch Projectionen in einander übergehen. Wenn man von einer Punkt-

*) Siehe unten § 23.

reihe durch eine oder mehrere Projectionen zu einer andern gelangt, so heissen die beiden Punktreihen projectiv. Folgende Sätze können wir jetzt unmittelbar aussprechen.

Sind die Punktreihen $abcd$ *und* $a'b'c'd'$ *projectiv,* ab *durch* cd *getrennt, so sind* $a'b'$ *durch* $c'd'$ *getrennt.*

Sind die Punktreihen $abcd$ *und* $abce$ *projectiv, so fallen* d *und* e *zusammen.*

Die Elemente der einen von zwei projectiven Reihen darf man beliebig anordnen; aber durch die Anordnung, welche man in der einen Reihe trifft, wird im Allgemeinen die in der andern zu treffende bestimmt. *Wenn zwei Punktreihen aus gleichvielen, aber höchstens je drei Elementen bestehen, so sind sie stets projectiv, gleichviel wie man sie ordnet.* Nehmen wir aber vier Punkte $abcd$ in einer Geraden f. Durch d ziehe man eine Gerade g, wähle ausserhalb beider Geraden in ihrer Ebene einen Punkt A, projicire abc aus A auf g nach $\alpha\beta\gamma$ und bezeichne den Durchschnittspunkt von $a\beta$, $c\gamma$ mit B; dann werden $abcd$ aus A auf g nach $\alpha\beta\gamma d$, diese aus a auf $c\gamma$ nach $AB\gamma c$, diese endlich aus β auf f zurück nach $badc$ projicirt. *Folglich sind* $abcd$ *und* $badc$ *projectiv, überhaupt* $abcd$, $badc$, $cdab$, $dcba$. Nun mögen etwa ab durch cd getrennt werden. *Liegen* $abcd$ *harmonisch, so sind auch* $abcd$ *und* $bacd$, $abdc$, $cdba$, $dcab$ *projectiv.* Umgekehrt: Sind $abcd$ und $bacd$ projectiv, so sind es zugleich $\alpha\beta\gamma d$ und $bacd$, also, wenn g und bB in α' sich schneiden, $\alpha\beta\gamma d$ und $\alpha'\beta\gamma d$ projectiv, d. h. α mit α' identisch, $abcd$ harmonisch. *Wenn* $abcd$ *nicht harmonisch liegen, so ist* $abcd$ *keiner der Reihen* $bacd$, $abdc$, $cdba$, $dcab$ *projectiv.* Es bleiben noch 16 Permutationen übrig, welche sich mit den Punkten $abcd$ vornehmen lassen; aber da weder ac durch bd noch ad durch bc getrennt werden, so ist die Reihe $abcd$ niemals einer von diesen 16 Permutationen projectiv.

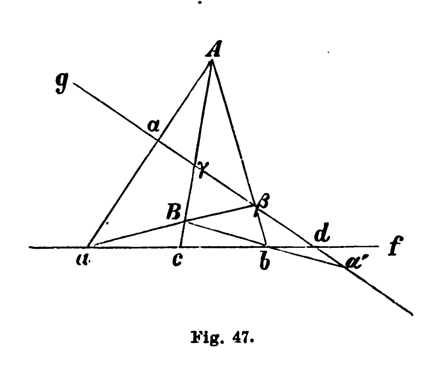


Fig. 47.

Hat man zwei projective Punktreihen $abc\ldots$ und $a'b'c'\ldots$, so heissen aa', bb', cc', ... homologe Punkte; fällt ein Punkt mit dem homologen zusammen, so sagen wir, die beiden Reihen haben den Punkt entsprechend gemein. Je zwei homologe Theile der beiden Reihen sind projectiv. Sind drei Punkte entsprechend gemein, so sind es alle.

Es seien P und P' projective Punktreihen, welche mindestens aus je drei Punkten bestehen und in bestimmter Anordnung festgehalten werden; die Träger sollen resp. f und f' heissen (brauchen aber nicht verschieden zu sein). In f werde ein Punkt d beliebig angenommen. Wenn er zu P gehört, so entspricht ihm in f' ein völlig bestimmter Punkt d' als homologer Punkt der Reihe P'. Wenn d nicht zu P gehört, so schreibe man d zur Reihe P hinzu und erweitere P' mittels irgend welcher von P zu P' führenden Projectionen um einen Punkt d' derart, dass die erweiterten Figuren wieder projectiv sind; auch dann ist d' ein völlig bestimmter Punkt der f'. In beiden Fällen dürfen wir also sagen: d und d' sind homologe Punkte bei der zwischen P und P' gegebenen projectiven Beziehung (Projectivität), und es ist in diesem Sinne jedem Punkte der f ein und nur ein homologer Punkt der f' zugeordnet.

Um eine projective Beziehung zwischen zwei Punktreihen herzustellen, darf man zu drei Punkten der einen Reihe die homologen Punkte beliebig wählen; durch drei solche Paare ist aber die projective Beziehung vollkommen bestimmt.

Punktreihe, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel werden einförmige Gebilde (einförmige Grundgebilde) genannt. Sind zwei einförmige Gebilde perspectiv oder kann man zwischen sie irgend eine Anzahl von ebensolchen Gebilden derart einschalten, dass nach der Einschaltung je zwei aufeinanderfolgende Gebilde perspectiv sind, so nennt man jene beiden Gebilde projectiv und wendet auf sie alle Ausdrücke an, welche für Punktreihen soeben erklärt worden sind. *Jedes einförmige Gebilde ist sich selbst projectiv. Zwei einförmige Gebilde, die einem dritten projectiv sind, sind unter sich projectiv. Sind die einförmigen Gebilde $abcd$ und $a'b'c'd'$ projectiv, ab durch cd getrennt, so sind $a'b'$ durch $c'd'$ getrennt. Je zwei homologe Theile zweier projectiven einförmigen Gebilde sind projectiv.* Ueberhaupt lassen sich die obigen Sätze einfach verallgemeinern.

Einförmige Gebilde, die aus gleichvielen, aber höchstens je drei Elementen bestehen, sind stets projectiv. Durch drei Paare von homologen Elementen wird eine projective Beziehung zwischen zwei einförmigen Gebilden vollkommen bestimmt; so dass jedem Element, das zu dem einen Gebilde gerechnet werden kann, im andern ein und nur ein homologes Element entspricht.

Ist von zwei projectiven einförmigen Gebilden das eine harmonisch, so ist es auch das andere. Je zwei harmonische Gebilde sind projectiv. Das harmonische Gebilde $abcd$ ist demnach zu $badc$, $cdab$, $dcba$, $bacd$, $abdc$, $cdba$ und $dcab$ projectiv, aber zu keiner der 16 übrigen Permutationen. *Ist dagegen keine Permutation*

des einförmigen Gebildes $abcd$ *harmonisch, so sind* $badc$, $cdab$ *und* $dcba$ *zu* $abcd$ *projectiv, aber keine der 20 übrigen Permutationen.*

Perspective einförmige Gebilde sind projectiv. Umgekehrt: *Wenn zwischen zwei einförmigen Gebilden eine projective Beziehung stattfindet und es liegen drei Elemente des einen perspectiv mit den homologen Elementen des andern, so liegen die beiden Gebilde überhaupt perspectiv.*

Von Punktreihen auf demselben Träger oder Ebenenbüscheln mit derselben Axe oder concentrischen Strahlenbüscheln an derselben Ebene wird gesagt, dass sie aufeinanderliegen oder sich in vereinigter Lage befinden. *Zwei projective Punktreihen oder Ebenenbüschel oder Strahlenbüschel (mit gemeinschaftlichem Scheitel oder in einerlei Ebene), welche ein Element entsprechend gemein haben, ohne aufeinander zu liegen, sind allemal perspectiv.*

Liegen zwei projective einförmige Gebilde $abc\ldots$ und $a'b'c'\ldots$ aufeinander, so kann es vorkommen, dass nicht bloss aa' (welche von einander verschieden sein sollen), sondern auch $a'a$ homologe Elemente sind, d. h. $aa'bc$ und $a'ab'c'$ projectiv. Alsdann sind $b'b$ ebenfalls homolog, da $aa'bb'$ und $a'ab'b$ projectiv, und man kann überhaupt durchweg die homologen Elemente mit einander vertauschen. Von solchen Gebilden $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ sagt man, dass sie involutorisch liegen, oder man sagt, dass die Paare aa', bb', cc', ... eine Involution bilden; die Elemente eines jeden Paares heissen conjugirt und sind vertauschbar. Durch zwei Paare ist die Involution bestimmt, d. h. zu jedem Element das conjugirte; zwei Paare aber können beliebig angenommen werden.

Die Aufgabe, in einer durch zwei Paare gegebenen Involution zu einem Elemente das conjugirte zu construiren, giebt uns Gelegenheit, die in § 10 am Schluss angestellte Betrachtung zu ergänzen. Die Seiten eines ebenen vollständigen Vierecks $abcd$ werden dort mit einer Geraden durchschnitten, und zwar die Seiten bc, ca, ab, ad, bd, cd in resp. f, g, h, f_1, g_1, h_1. Damals wurde bewiesen, dass der sechste Punkt durch die übrigen bestimmt ist; jetzt können wir zeigen, dass ff_1, gg_1, hh_1 Paare einer Involution sind, d. h. *die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden seiner Ebene in Punktpaaren einer Involution geschnitten.* In der That ist die Punktreihe $fghh_1$ ein Schnitt des Strahlenbüschels $b(cgah_1)$, d. h. des Büschels der Strahlen bc bg ba bh_1, die Punktreihe $f_1g_1h_1h$ ein Schnitt des Strahlenbüschels $a(dg_1h_1b)$; da diese Strahlenbüschel perspectiv zum Büschel $h_1(cgab)$ d. i. $h_1(dg_1ab)$

liegen, so sind $fghh_1$ und $f_1g_1h_1h$ projectiv, folglich die Paare ff_1, gg_1, hh_1 in Involution. — Die auf Seite 82 beschriebene Construction liefert also in der durch zwei Paare ff_1 und gg_1 gegebenen Involution von Punkten zum gegebenen Punkte h den conjugirten h_1; auf die Involution im Ebenenbüschel und Strahlenbüschel lässt sie sich leicht übertragen. Auch ist jetzt klar, dass man bei jener Construction f mit f_1 oder g mit g_1 vertauschen darf.

Wenn in einer Involution irgend ein Paar durch ein anderes getrennt wird, so wird jedes Paar durch jedes andere getrennt. Denn wenn die Elemente aa' durch bb' getrennt werden, so liegt bei ausgeschlossenem c von den Elementen b und b' das eine (b) zwischen a und a', das andere (b') aber nicht; sollen nun $aa'b'c$ und $a'abc'$ projectiv sein, so werden aa' zwar durch bc, aber nicht durch bc' getrennt; folglich sind aa' durch cc' getrennt, ebenso bb' durch cc' u. s. w.

Bei aufeinanderliegenden projectiven Gebilden werden die etwa sich selbst entsprechenden Elemente auch Doppelelemente genannt. *Werden in einem einförmigen Gebilde die Paare aa', bb', cc' ... durch die festen Elemente f und g harmonisch getrennt, so bilden sie eine Involution mit den Doppelelementen f und g.* Denn es sind (§ 11 Seite 90) $fga'b$ und $fgab'$, $fgab$ und $fga'b'$ projectiv; daraus darf man aber die Projectivität der Gebilde $fgaa'b$ und $fga'ab'$, überhaupt $fgaa'bc$ ... und $fga'ab'c'$ ... schliessen. Umgekehrt: *Sind aa' conjugirte Elemente einer Involution mit den Doppelelementen f und g, so liegen $fgaa'$ harmonisch;* denn dann sind $fgaa'$ und $fga'a$ projectiv. Weiter ergiebt sich (§ 11 Seite 90): *Sind aa' und bb' Paare einer Involution mit zwei Doppelelementen, so werden aa' durch bb' nicht getrennt.*

Hiernach können nicht bei jeder Involution, also nicht bei jeder projectiven Beziehung zwischen aufeinanderliegenden projectiven Gebilden zwei Doppelelemente auftreten*). *Aber wenn die projectiven einförmigen Gebilde abc ... und $a'b'c'$ ... aufeinanderliegen und ein Doppelelement f besitzen, so haben sie* (mit einer sogleich zu erwähnenden Ausnahme) *noch ein zweites Doppelelement.* Es sei in der That weder a noch b entsprechend gemein, so dass die Paare ab' und ba' eine Involution bestimmen, und in dieser Involution sei g das zu f conjugirte Element, also $fgab$ und $gfb'a'$ projectiv; dann sind auch $fgab$ und $fga'b'$ projectiv, also g Doppelelement der gegebenen Projectivität. — Bei dieser Gelegenheit bemerken wir: *Wenn in einem einförmigen Gebilde $fgab$ und $fga'b'$*

*) S. noch unten § 23.

projectiv sind, so liegen die Paare fg, ab' *und* ba' *in Involution, und umgekehrt;* es sind dann auch $fgaa'$ und $fgbb'$ projectiv.

Sollen die projectiven einförmigen Gebilde $abc\ldots$ und $a'b'c'\ldots$, welche in vereinigter Lage und mit einem Doppelelement f angenommen werden, kein weiteres Doppelelement besitzen, so muss f zugleich in der durch die Paare ab' und ba' bestimmten Involution sich selbst entsprechen ($fab'b$ und $fb'aa'$ projectiv). Ist alsdann m das vierte harmonische Element zu $ab'f$ ($fab'm$ und $fb'am$ projectiv, mithin auch $fmab'b$ und $fmb'aa'$), so ist m das andere Doppelelement jener Involution, also zugleich das vierte harmonische Element zu $ba'f$, d. h. die Paare ab und $a'b'$ sind äquivalent für das Grenzelement f, ebenso die Paare ac und $a'c'$ u. s. w. Wir wollen deshalb eine derartige Beziehung eine Aequivalenz mit dem Grenzelement f nennen; sie ist nicht involutorisch. Zu ihrer Bestimmung sind ausser dem Grenzelement f noch irgend zwei homologe Elemente aa' anzugeben; construirt man a'' als viertes harmonisches Element zu $a'fa$, so sind die Paare aa' und $a'a''$ für das Grenzelement f äquivalent, und man hat drei Paare ff, aa', $a'a''$ der projectiven Beziehung. —

Ist in einer Geraden f*) durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben, und entspricht dem Punkte b der Geraden f, der kein Doppelpunkt sein soll, bei der Beziehung PP' der Punkt c, bei der Beziehung $P'P$ der Punkt a, so sind die Punkte a und c nicht bloss von b, sondern auch von einander verschieden. Wenn also noch cd homologe Punkte bei der Beziehung PP' vorstellen, so ist durch die Punkte $abcd$, nämlich durch die drei Paare ab, bc, cd, die projective Beziehung bestimmt.

Dem in der Geraden f variirenden Punkte y entspreche z bei der Beziehung PP', dagegen x bei der Beziehung $P'P$. Zieht man durch b noch eine Gerade g, nimmt in der Ebene fg den Punkt O ausserhalb der beiden Geraden und projicirt $cdyz$ aus O auf g nach $\beta\gamma\xi\eta$, so sind $abxy$ und $bcyz$ projectiv, $bcyz$ und $b\beta\xi\eta$ perspectiv, folglich $abxy$ und $b\beta\xi\eta$ projectiv, ebenso die Strahlenbüschel $\eta(abxy)$ und $y(b\beta\xi\eta)$, diese mithin sogar perspectiv. Begegnen sich also die Geraden $x\eta$ und ξy im Punkte Q, so liegen $a\beta Q$ in gerader Linie, Q in der festen Geraden $a\beta$.

Dem (von a, b, c verschiedenen) Punkte m der Geraden f seien die Punkte l und n in den Beziehungen $P'P$ und PP' zugeordnet. Projicirt man m und n aus O auf g nach resp. λ und μ, so sind

*) Vgl. Crelle's Journal Bd. 91 S. 349.

$ablx$ und $bcmy$, $bcmy$ und $cdnz$ projectiv, $cdnz$ und $\beta\gamma\mu\eta$ perspectiv, folglich $ablx$ und $\beta\gamma\mu\eta$ projectiv. Indem wir den Durchschnittspunkt R der Geraden $x\eta$ und $l\mu$ einführen, erkennen wir die Strahlenbüschel $\mu(ablx)$ und $R(\beta\gamma\mu\eta)$ nicht bloss als projectiv, sondern auch als perspectiv, da die Geraden μl und $R\mu$ zusammenfallen. Demnach liegt der Durchschnittspunkt der Strahlen μa und $R\beta$ in gerader Linie mit γ und x; die Strahlen μa und $R\beta$ schneiden sich auf der Geraden γx. Weiter sind die

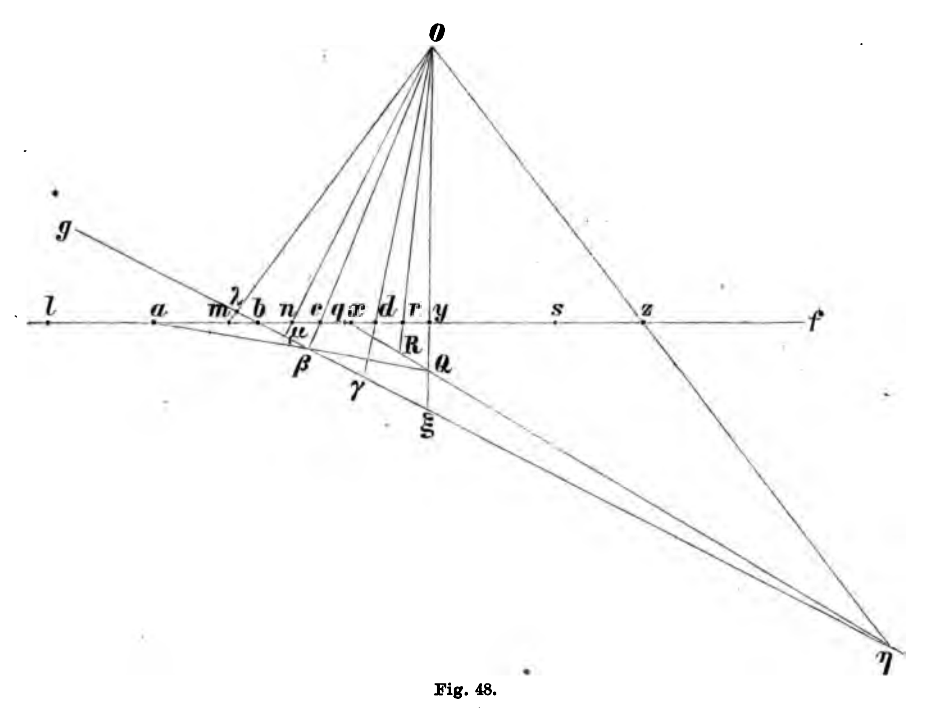


Fig. 48.

Büschel $a(b\beta\gamma\mu)$ und $\beta(xQ\eta R)$ perspectiv; denn die Strahlen ab und βx begegnen sich in x, $a\gamma$ und $\beta\eta$ in γ, $a\mu$ und βR auf γx, $a\beta$ und βQ fallen zusammen. Da mithin die Punktreihen $b\beta\gamma\mu$ und $xQ\eta R$, $b\beta\gamma\mu$ und $bcdn$, $bcdn$ und $abcm$ projectiv sind, so ergiebt sich schliesslich die Projectivität der Punktreihen $xQ\eta R$ und $abcm$.

Aus O projicire ich R auf f nach r. Dann sind $xyzr$ und $xQ\eta R$ perspectiv, folglich $xyzr$ und $abcm$ projectiv. Da man durch passende Wahl des Punktes m das Gebilde $abcm$ einem beliebig gegebenen, aus vier verschiedenen Elementen bestehenden einförmigen Gebilde projectiv machen kann, so ist in der Geraden f jedem Punkte y ein Punkt r durch die Forderung zugeordnet,

dass $xyzr$ einem festen Gebilde projectiv sein soll. Wenn m in einen Doppelpunkt der Projectivität PP' fällt, so vereinigt sich der Punkt m mit l und n, der Punkt λ mit μ, die Gerade $\lambda\mu$ mit Om, und der Punkt r hat beständig die Lage m. In jedem andern Falle beschreiben die Strahlen γx und βR, während y variirt, perspective Büschel resp. um γ und β mit dem perspectiven Durchschnitt $a\mu$, mithin gleichzeitig die Punkte x und R projective Punktreihen resp. in den Geraden f und $l\mu$; also ist auch die Beziehung zwischen y und r in der Geraden f Projectivität. Wenn endlich die Punkte z' und s bei der Beziehung PP' resp. den Punkten z und r entsprechen, also das Paar zs dem Paare yr, so sind $xyzr$ und $yzz's$ projectiv, d. h. $yzz's$ dem festen Gebilde projectiv, z und s zugeordnete Punkte der zwischen y und r bestehenden Projectivität. Die Paare dieser Beziehung werden durch die Projectivität PP' in Paare derselben Beziehung übertragen, und wir können daher sagen, die Beziehung yr sei bei der Projectivität PP' sich selbst homolog.

Werden auf einer Geraden, in welcher durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben ist, dem Punkte y durch die Beziehungen $P'P$ und PP' resp. die Punkte x und z zugeordnet und ein weiterer Punkt r so construirt, dass die gerade Punktreihe $xzyr$ einem festen Gebilde projectiv ausfällt, so ist auch die zwischen y und r entstehende Beziehung Projectivität und bei der Projectivität PP' sich selbst homolog. Fällt jedoch r bei einer Lage von y in einen Doppelpunkt der Projectivität PP', so bleibt r bei allen Lagen von y unverändert.

Durch die Beziehung $P'P$ werde dem Punkte r der (von r verschiedene) Punkt q zugeordnet. Dann sind $yrxq$ und $zsyr$ projectiv, mithin auch $yrxq$ und $rysz$, folglich die Paare qz, ry, sx in Involution, $xzyr$ und $sqry$ projectiv. — Nimmt man also $xzyr$ harmonisch, so werden auch $sqry$ oder $qsry$ harmonisch, $xzyr$ und $qsry$ projectiv; also wird dann y durch r in derselben Weise bestimmt, wie r durch y.

*Werden auf einer Geraden f, in welcher durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben ist, dem Punkte y durch die Beziehungen $P'P$ und PP' resp. die Punkte x und z zugeordnet und zu den Punkten xzy der vierte harmonische Punkt r aufgesucht, so bilden die Paare yr eine Involution, welche durch die Beziehung PP' in sich selbst übertragen wird**). Ist jedoch die Beziehung PP' eine Aequivalenz,

*) Diesen Satz hat Herr Schröter angegeben: Crelle's Journ. Bd. 77 S. 120.

so fällt r bei allen Lagen von y mit dem Grenzpunkte der Aequivalenz zusammen.

Im Strahlenbüschel und im Ebenenbüschel gelten analoge Sätze.

§ 17. Collineare Figuren.

Wir gehen jetzt zu den Gebilden zweiter Stufe über, indem wir unter diesem Namen Planfiguren und centrische Figuren zusammenfassen. Wenn man eine aus beliebig vielen Punkten bestehende Planfigur ein- oder mehrmal projicirt, so erhält man eine aus ebenso vielen Punkten bestehende Planfigur, und so oft Punkte der einen Figur an einer geraden Linie liegen, ist dies auch bei den entsprechenden Punkten der andern Figur der Fall. Solche Figuren heissen deshalb collinear, aber man wendet diesen Ausdruck überhaupt auf zwei Gebilde zweiter Stufe an, wenn sie perspectiv sind oder wenn man zwischen sie irgend eine Anzahl von Gebilden zweiter Stufe derart einschalten kann, dass nach der Einschaltung je zwei aufeinanderfolgende Gebilde perspectiv werden. Man kann dabei die einförmigen Gebilde als specielle Fälle zulassen und demgemäss projective einförmige Gebilde auch collinear nennen. *Jedes Gebilde zweiter Stufe ist sich selbst collinear. Je zwei homologe Theile zweier collinearen Gebilde zweiter Stufe sind collinear. Gebilde zweiter Stufe sind collinear, wenn sie einem und demselben Gebilde zweiter Stufe collinear sind.*

Um zwei Gebilde zweiter Stufe collinear auf einander zu beziehen, darf man vier gleichartigen Elementen des einen, von denen keine drei einem einförmigen Gebilde angehören, vier ebensolche Elemente des andern beliebig zuordnen; z. B. wenn man in einer Ebene vier Punkte $abcd$ annimmt, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und vier ebensolche Punkte $a'b'c'd'$ in derselben oder in einer andern Ebene, so sind die Figuren $abcd$ und $a'b'c'd'$ collinear. Der Satz wird leicht als allgemein richtig erkannt, sobald er sich in dem angeführten besonderen Falle bewährt. Es sei nun m der Durchschnittspunkt der Geraden ab und cd, m' der der Geraden $a'b'$ und $c'd'$, P eine von $a'b'c'$ verschiedene Ebene durch $a'b'$; so kann man $abcdm$ durch eine geeignete Anzahl von Projectionen auf die Ebene P so übertragen, dass aa', bb', mm' homologe Punkte werden. Ergeben sich dabei $\gamma\delta$ als homologe Punkte zu cd, so sind die Figuren $a'b'\gamma\delta$ und $a'b'c'd'$ perspectiv; Centrum der Perspectivität ist der Durchschnittspunkt der Geraden $\gamma c'$ und $\delta d'$.

Eine Collineation zwischen zwei Gebilden zweiter Stufe ist vollkommen bestimmt, wenn man zu vier gleichartigen Elementen des

einen, von denen keine drei einem einförmigen Gebilde angehören, die homologen kennt. Es ist hinreichend, folgenden besonderen Fall zu beweisen: Sind die aus je fünf Punkten bestehenden Planfiguren $abcde$ und $abcde'$ collinear und keine drei von den Punkten $abcd$ in gerader Linie, so fällt e mit e' zusammen. Zu dem Zweck braucht man aber nur zu beachten, dass die Geraden ae und ae' wegen der Collineation zwischen den Strahlenbüscheln $a(bcde)$ und $a(bcde')$ identisch sind, ebenso die Geraden be und be', ce und ce', de und de'. —

Um jetzt den Begriff der Collineation in voller Allgemeinheit einzuführen, stellen wir folgende Betrachtung an. Es seien drei Punkte Oaa' in einer Geraden gegeben und eine Ebene P, welche keinen der drei Punkte enthält. Jedem Punkte b ausserhalb der Geraden aa' ordnen wir in der Geraden Ob den Punkt b' zu, dessen Verbindungslinie mit a' der ab auf P begegnet; wird dagegen β auf aa' von O verschieden angenommen, so nehmen wir einen Punkt b ausserhalb der Ebene P und den zugeordneten Punkt b' zu Hülfe und ordnen dem Punkte β in der Geraden aa' den Punkt β' zu, dessen Verbindungslinie mit b' der $b\beta$ auf P begegnet; der Punkt O endlich wird sich selbst zugeordnet. Dass β' unabhängig von b ausfällt, bedarf eines Beweises. Es sei daher zunächst c irgend ein Punkt ausserhalb der Ebenen P und Oab, c' der zugeordnete Punkt in Oc, so dass ac und $a'c'$ sich auf P begegnen. Wegen der Perspectivität der Dreiecke abc und $a'b'c'$ schneiden sich bc $b'c'$, ca $c'a'$, ab $a'b'$ auf einer Geraden, folglich auch bc und $b'c'$ auf P, ebenso βc und $\beta'c'$ wegen der Perspectivität der Dreiecke βbc und $\beta'b'c'$, d. h. bei der Construction von β' kann b durch c ersetzt werden. Ist ferner γ ein Punkt der Ebene Oab, aber ausserhalb der Ebene P und der Geraden aa', also ausserhalb der Ebene Oac, so kann man γ statt c benutzen, also auch statt b. Die Geraden $c\gamma$ und $c'\gamma'$ treffen sich auf P, ebenso $b\gamma$ und $b'\gamma'$. Sind also dd' und ee' Paare von homologen (d. i. zugeordneten) Punkten, so treffen sich die Geraden de und $d'e'$ auf P; man kann daher das Paar aa', von welchem wir ausgingen, dnrch jedes andere Paar homologer Punkte, wenn sie von einander verschieden sind, ersetzen. Der Punkt O und die Punkte der Ebene P sind sich selbst homolog, aber nur diese.

Bezeichnet man zwei auf einander bezogene Punktgruppen als perspectiv, sobald die homologen Punkte durch die Strahlen eines Bündels mit einander verbunden werden, dann bildet die soeben definirte Beziehung eine besondere Art von Perspectivität. Wir wollen sie Collinear-Perspectivität nennen, weil Punkten

einer Geraden stets Punkte einer Geraden entsprechen. Sind in der That abc Punkte einer Geraden g, so liegen die homologen Punkte $a'b'c'$ auf einer Geraden g'. Ist g in P enthalten, so sind abc entsprechend gemein; liegt g ausserhalb P, ohne O zu enthalten, so fallen die Geraden $a'b'$ und $a'c'$ in eine einzige zusammen, weil sie durch den Punkt gP gehen; geht endlich g durch O, so liegen $a'b'c'$ auf g. Wir nennen gg' homologe Geraden. Die Geraden, welche in P liegen oder durch O gehen, sind sich selbst homolog, aber nur diese. Je zwei homologe Geraden begegnen sich in einem Punkte von P, ihre Ebene geht durch O.

Jeder Planfigur entspricht eine Planfigur; die Ebenen solcher Figuren nennen wir homolog. Die Ebene P und alle durch O gehenden Ebenen sind sich selbst homolog, aber nur diese. Je zwei homologe Ebenen schneiden sich in einer Geraden der Ebene P. Sind DD' und EE' Paare von homologen Ebenen, so geht die Ebene der Geraden DE und $D'E'$ durch O. Die Beziehung ist jetzt auf Figuren ausgedehnt, die sich in beliebiger Weise aus Punkten, Geraden und Ebenen zusammensetzen, und man sieht, wie neben dem Punkte O und der Ebene P, an denen nur sich selbst homologe Ebenen liegen, ein Paar homologer Punkte oder Ebenen nothwendig und hinreichend ist, um die ganze Beziehung zu bestimmen. Die Definition ist sich selbst reciprok.

Jede Planfigur, deren Ebene nicht durch O geht, liegt perspectiv zur homologen, wobei O Centrum der Perspectivität ist; auch jede centrische Figur, deren Scheitel nicht zu P gehört, liegt zur homologen perspectiv, wobei P der perspective Durchschnitt ist. Wir nennen daher O das C e n t r u m d e r P e r s p e c t i v i t ä t und P den p e r s p e c t i v e n D u r c h s c h n i t t für unsere allgemeine Beziehung. Nimmt man eine Figur in einer durch O gehenden Ebene, so liegt die homologe Figur in derselben Ebene, und wenn aa' (verschiedene) homologe Punkte ausserhalb dieser Ebene sind, so wird die erste Figur aus a auf P nach derselben Figur projicirt, wie die zweite aus a'. Analog verhalten sich die centrischen Figuren, deren Scheitel auf P liegen. Hiernach sind je zwei homologe Gebilde zweiter Stufe collinear. Man schliesst daraus: Sind $abcd$ und $a'b'c'd'$ homologe einförmige Gebilde und ab durch cd getrennt, so werden $a'b'$ durch $c'd'$ getrennt. Ueberdies wissen wir, dass aneinanderliegenden Elementen ebensolche entsprechen. *Folglich haben collinear-perspective Figuren alle graphischen Eigenschaften mit einander gemein.*

Jede perspective Beziehung zwischen zwei Figuren in verschiedenen Ebenen lässt sich zu einer Collinear-Perspectivität erweitern,

die sich auf alle Elemente erstreckt; man hat nämlich ausser dem Centrum der Perspectivität zwei homologe Ebenen, durch deren Schnittlinie man den perspectiven Durchschnitt beliebig legen kann. *Ebenso kann man zwei perspective centrische Figuren, deren Scheitel verschieden sind, stets zu homologen Theilen von collinear-perspectiven Figuren mit beliebigen Elementen machen.*

Im Anschluss an diese Bemerkung kann nunmehr die Definition der Collinearität von Figuren, bei denen die homologen Elemente gleichartig sind, zu voller Allgemeinheit erhoben werden. Zwei solche Figuren heissen c o l l i n e a r, wenn sie collinear-perspectiv sind, oder wenn man zwischen sie eine Anzahl von Figuren derart einschalten kann, dass nach der Einschaltung je zwei aufeinanderfolgende Figuren collinear-perspectiv sind. *Jede Figur ist sich selbst collinear. Je zwei homologe Theile von collinearen Figuren sind collinear. Zwei Figuren sind stets collinear, wenn sie einer dritten collinear sind.* Die Begriffe collinear und collinear-perspectiv sind sich selbst reciprok.

Zwei Figuren $abcde$ und $a'b'c'd'e'$, die sich aus je fünf Punkten derart zusammensetzen, dass in keiner Figur vier Punkte einer Ebene vorkommen, sind collinear. Wird nämlich e aus d auf die Ebene abc nach m, e' aus d' auf die Ebene $a'b'c'$ nach m' projicirt, so sind die Figuren $abcm$ und $a'b'c'm'$ collinear. Lassen sich bei dieser Collineation den Punkten de die Punkte $\delta\varepsilon$ zuordnen, so sind die Figuren $a'b'c'\delta\varepsilon$ und $a'b'c'd'e'$ collinear-perspectiv; Centrum der Perspectivität ist der Durchschnittspunkt der Geraden $\delta d'$ und $\varepsilon e'$, perspectiver Durchschnitt die Ebene $a'b'c'$. — *Eine Collineation ist vollkommen bestimmt, wenn man zu fünf Punkten, von denen keine vier in einer Ebene liegen, die homologen kennt;* d. h. wenn die aus je sechs Punkten bestehenden Figuren $abcdef$ und $abcdef'$ collinear sind und von den Punkten $abcde$ keine vier in einer Ebene liegen, so fällt f mit f' zusammen. Da nämlich die Strahlenbündel $a(bcdef)$ und $a(bcdef')$ collinear sind, so fallen die Strahlen af und af' zusammen, ebenso bf und bf', cf und cf', df und df', ef und ef'. — Die reciproken Sätze mögen nicht erst besonders ausgesprochen werden.

Collineare Gebilde jeder Art nennt man auch p r o j e c t i v, aber die letztere Benennung ist nicht auf den Fall der Collineation beschränkt. *Collineare Figuren, bei denen die homologen Elemente gleichartig sind, haben alle graphischen Eigenschaften mit einander gemein.* So werden z. B. die graphischen Eigenschaften einer Punktreihe durch keine Projection geändert. Dass umgekehrt zwei Punktreihen projectiv sind, die in allen graphischen Eigenschaften über-

einstimmen, hat sich schon in § 15 ergeben. Uebertragen wir dies nun auf die allgemeineren Gebilde. Zunächst setzen wir in einem Gebilde zweiter Stufe aus gleichartigen Elementen die Figuren *abcde* und *abcde'* zusammen, welche alle graphischen Eigenschaften gemein haben sollen, wobei aber keine drei von den Elementen *abcd* einem einförmigen Gebilde angehören dürfen. Je zwei derartige Elemente *a* und *b* bestimmen ein reciprokes Element *ab* in jenem Gebilde; die Elemente *ab*, *ac*, *ad*, *ae* liegen in einem einförmigen Gebilde, ebenso die Elemente *ab*, *ac*, *ad*, *ae'*; da diese Gebilde alle graphischen Eigenschaften gemein haben, so fallen *ae* und *ae'* zusammen, ebenso *be* und *be'*, *ce* und *ce'*, *de* und *de'*, also *e* und *e'*. Setzen wir endlich aus Punkten oder aus Ebenen die Figuren *abcdef* und *abcdef'*, welche wieder alle graphischen Eigenschaften gemein haben sollen, derart zusammen, dass von den Elementen *abcde* keine vier in einem Gebilde zweiter Stufe liegen, so fällt *af* mit *af'* zusammen, *bf* mit *bf'* u. s. w., folglich *f* mit *f'*. Wird also die Figur *abcdef* aus sechs Punkten derart gebildet, dass von den Punkten *abcde* keine vier in einer Ebene liegen, und die Figur *a'b'c'd'e'f'* aus sechs Punkten derart, dass die beiden Figuren in allen graphischen Eigenschaften übereinstimmen, so sind die Figuren collinear. Mithin gilt der Satz:

Eine Beziehung, vermöge deren jedem Punkte ein bestimmter Punkt derart zugeordnet wird, dass je zwei homologe Figuren alle graphischen Eigenschaften gemein haben, ist eine Collineation.

Eine solche Beziehung ist die Congruenz. Mit Hülfe zweier congruenten Figuren, die aus je drei nicht in gerader Linie gelegenen eigentlichen Punkten bestehen, kann man eine Beziehung herstellen, welche sich auf alle Punkte, Geraden und Ebenen erstreckt; dabei sind je zwei homologe Figuren congruent und stimmen in allen graphischen Eigenschaften überein. Congruente Figuren können immer als homologe Theile derartiger Figuren aufgefasst werden. Hieraus folgt:

Congruente Figuren sind collinear. —

Weil die graphischen Eigenschaften einer Planfigur durch Projection auf eine andere Ebene, mithin überhaupt durch Uebergang zu einer collinearen Planfigur nicht geändert werden, so durfte man zunächst die graphischen Eigenschaften der Planfiguren projective, d. i. bei der Projection sich übertragende nennen. Nun ist bereits erwähnt worden, dass man collineare Gebilde jeder Art auch projectiv nennt. In entsprechender Weise hat man die Benennung projective Eigenschaften ausgedehnt, indem man sie für die

graphischen Eigenschaften beliebiger Figuren einführte. Die Geometrie der Lage heisst in Folge dessen auch die Lehre von den projectiven Eigenschaften der Figuren oder die projective Geometrie.

§ 18. Reciproke Figuren.

Der Name Projectivität wird, wie schon erwähnt, nicht bloss auf die collinearen Beziehungen angewendet. Um auch die übrigen hierher gehörigen Beziehungen kennen zu lernen, kann man folgenden Ausgangspunkt wählen.

Es seien efg drei Geraden, von denen keine zwei einander begegnen. Die Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche irgend einen Punkt der e mit f und g verbinden, begegnet gleichzeitig den drei gegebenen Linien; durch jeden Punkt einer der gegebenen Linien kann man eine solche Gerade ziehen, und zwar nur eine; zwei solche Geraden können einander nicht begegnen. Wenn nun die Geraden $iklm$ die Linie e in $abcd$, f in $a'b'c'd'$, g in $a''b''c''d''$ schneiden, so liegen z. B. die Punktreihen $abcd$ und $a'b'c'd'$ zum Ebenenbüschel $g(iklm)$ perspectiv, und es sind daher $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ projective Gebilde.

Umgekehrt: Werden auf den Trägern e und f, die sich nicht schneiden, projective Punktreihen $abcd$ und $a'b'c'd'$ angenommen, so wird jede Gerade g, die von den Linien aa', bb', cc' getroffen wird, auch von dd' getroffen. Denn von den Geraden aa', bb', cc', dd' können keine zwei einander treffen, mithin auch keine zwei von den Geraden efg; durch d kann man also eine Gerade m ziehen, welche f und g schneidet, etwa f in D; die Punktreihen $a'b'c'd'$ und $a'b'c'D$ sind projectiv zu $abcd$, folglich d' mit D, dd' mit m identisch, dd' und g in einer Ebene. — Wenn also die drei Geraden efg, von denen keine zwei sich schneiden, von den vier Geraden $iklm$ getroffen werden, so wird jede Gerade, die von ikl geschnitten wird, auch von m geschnitten.

Mittels zweier projectiven Punktreihen, deren Träger e und f sich nicht schneiden, werden wir nun jedem Punkte N eine Ebene N' und jeder Ebene P einen Punkt P' zuordnen. Durch den Punkt N geht eine Gerade l, welche e und f schneidet, etwa in a und α; bildet man aus Punkten, welche vermöge der gegebenen Projectivität zusammengehören, die Paare $a\beta$ und $b\alpha$, so ist die Ebene $Nb\beta$ mit N' zu bezeichnen. Die Ebene P schneide e in c, f in γ; $c\delta$ und $d\gamma$ seien Paare von Punkten, welche vermöge der gegebenen Projectivität zusammengehören; dann schneidet $d\delta$ die Ebene

P im Punkte P'. Nennen wir die Elemente NN' homolog, ebenso PP', so sind auch $N'N$, $P'P$ homolog, und jeder Punkt liegt in der homologen Ebene.

Die Punktreihen $abcd$ und $\beta\alpha\delta\gamma$ sind projectiv, mithin auch $abcd$ und $\alpha\beta\gamma\delta$; daher wird jede Gerade, welche die Linien $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ schneidet, auch von $d\delta$ getroffen. Die Gerade PN' schneidet stets die Linien $b\beta$ und $c\gamma$; wenn N in P liegt, so schneiden sich ausserdem PN' und $a\alpha$, mithin auch PN' und $d\delta$, d. h. die Ebene N' enthält den Durchschnittspunkt P' der Ebene P und der Geraden $d\delta$. Es dreht sich also die Ebene N' um den Punkt P', während N in P variirt. Lässt man demnach den Punkt N eine Gerade h durchlaufen, so dreht sich die Ebene N' um eine bestimmte Gerade h', und so lange die Ebene P durch h geht, bewegt sich der Punkt P' auf h'. Die Geraden hh' oder $h'h$ heissen homolog. Ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel seiner Ebene homolog ist, besteht nur aus sich selbst homologen Geraden. Eine Gerade, die in keinem derartigen Büschel vorkommt, ist von ihrer homologen stets verschieden und hat mit ihr keinen Punkt gemein. Jede Gerade, welche zwei homologe (verschiedene) Geraden schneidet, ist sich selbst homolog; jede sich selbst homologe Gerade, welche die eine von zwei homologen Geraden schneidet, schneidet auch die andere.

Von den Paaren, welche mittels dieser auf alle Punkte, Geraden und Ebenen sich erstreckenden Zuordnung zusammengesetzt werden können, sagt man, dass sie ein Nullsystem bilden. Den Punkten $pqrs$ einer Geraden h entsprechen die Ebenen $p'q'r's'$ durch die homologe Gerade h'; die Gebilde $pqrs$ und $p'q'r's'$ sind projectiv. Denn ist h von h' verschieden, so sind sie sogar perspectiv; fällt aber h mit h' zusammen, so seien nn' homologe verschiedene Geraden, und es mögen die Ebenen $p'q'r's'$ von n in $p_1q_1r_1s_1$, von n' in $p_2q_2r_2s_2$ getroffen werden; da pp_1p_2 in gerader Linie liegen, ebenso qq_1q_2, rr_1r_2, ss_1s_2, so sind die Gebilde $pqrs$ und $p_1q_1r_1s_1$ projectiv, überdies $p_1q_1r_1s_1$ und $p'q'r's'$ perspectiv. — Sind daher u und v sich selbst homologe Geraden, die sich nicht schneiden, und $iklm$ sich selbst homologe Geraden, die jene beiden schneiden, etwa u in $ABCD$, v in $A_1B_1C_1D_1$, so sind $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ projectiv; denn die Ebenen ui, uk, ul, um sind den Punkten $ABCD$ zugeordnet und gehen resp. durch $A_1B_1C_1D_1$. — Zur Erzeugung des Nullsystemes waren zwei sich selbst homologe Geraden (e und f), die sich nicht schneiden, und drei sich selbst homologe Geraden (z. B. $a\beta$, $b\alpha$, $c\delta$), die jene beiden schneiden, gegeben. Wir sehen jetzt, dass diese Bestimmungsstücke be-

liebig gewählt werden dürfen, und dass sie nur ein einziges Nullsystem liefern.

Auch die Strahlenbüschel $EFGH$ und $E'F'G'H'$ sind projectiv, wenn sie homolog sind; wählt man nämlich an der Ebene EF, aber nicht am Punkte EF, die Gerade h beliebig und nennt h' die homologe, so dass h' durch den Punkt $E'F'$ geht, ohne in die Ebene $E'F'$ zu fallen, so ist die Punktreihe $h(EFGH)$ zum Ebenenbüschel $h'(E'F'G'H')$ projectiv. Es sind demnach je zwei homologe einförmige Gebilde projectiv. Elementen, welche aneinanderliegen, sind aneinanderliegende zugeordnet, getrennten Paaren getrennte. Wenn also eine Figur irgend eine graphische Eigenschaft besitzt, so kommt der homologen Figur die reciproke Eigenschaft zu.

Daraus folgt aber ohne Einschränkung, dass zu jeder aus Punkten, Geraden und Ebenen beliebig zusammengesetzten Figur A eine andere aus den reciproken Elementen bestehende Figur A' existirt, die von allen graphischen Eigenschaften der Figur A die reciproken besitzt und sonst keine. Bezeichnen wir daher mit α und β graphische Eigenschaften einer Figur, mit α' und β' die reciproken Eigenschaften, welche natürlich die reciproken Elemente voraussetzen, und nehmen wir an, dass die Eigenschaft α stets die Eigenschaft β nach sich zieht, so hat auch α' stets β' zur Folge; denn wenn man von einer Figur A mit der Eigenschaft α' mittels eines Nullsystemes zur Figur A' übergeht, so besitzt A' die Eigenschaft α und mithin auch β, und folglich kommt der Figur A die Eigenschaft β' zu.

Damit ist nun das Gesetz der Dualität zwischen Punkt und Ebene ohne jeden Vorbehalt erwiesen, in Folge dessen auch die beiden anderen Dualitätsgesetze der projectiven Geometrie. Es stand zwar schon fest, dass die drei Arten der Reciprocität für alle Folgerungen aus den bisher aufgeführten Stammsätzen gültig sind; wir sehen aber jetzt, dass diese Gesetze in der projectiven Geometrie allgemeine Anwendung finden müssen, gleichviel ob sich noch weitere Stammsätze mögen angeben lassen oder nicht. —

Wenn man ein Nullsystem mit einer (auf alle Elemente ausdehnbaren) Collineation derart verbindet, dass man zu jedem Elemente erst das homologe im Nullsystem und dann zu diesem das homologe in der Collineation bestimmt, so erhält man eine sogenannte reciproke oder duale Beziehung. Dabei wird jedem Punkte eine Ebene, jeder Geraden eine Gerade und jeder Ebene ein Punkt zugeordnet. Zwei Figuren, welche vermöge einer sol-

chen Beziehung homolog sind, heissen reciprok oder dual; zu jeder projectiven Eigenschaft der einen Figur ist die reciproke Eigenschaft bei der andern vorhanden. — *Zwei Figuren, die zu einer dritten reciprok sind, haben alle projectiven Eigenschaften gemein.* — Wenn von fünf Punkten $abcde$ keine vier in einer Ebene liegen und von fünf Punkten $a'b'c'd'e'$ keine vier einen Punkt gemein haben, so sind die Figuren $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ stets reciprok, und zwar giebt es nur eine einzige Reciprocität, bei der sie als homologe Figuren auftreten. Sind nämlich $ABCDE$ die homologen Ebenen zu $abcde$ in irgend einem Nullsystem, so sind die Figuren $ABCDE$ und $a'b'c'd'e'$ collinear, folglich $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ reciprok. Ist ferner f ein beliebiger Punkt, so kann man nicht zwei verschiedene Ebenen f' und f'' so bestimmen, dass $a'b'c'd'e'f'$ und $a'b'c'd'e'f''$ reciprok zu $abcdef$ werden, weil die Figuren $a'b'c'd'e'f'$ und $a'b'c'd'e'f''$ alle graphischen Eigenschaften gemein haben müssten.

Das Nullsystem ist ein besonderer Fall der Reciprocität. *Wenn eine reciproke Beziehung so beschaffen ist, dass jeder Punkt in der homologen Ebene liegt, so entsteht ein Nullsystem.* Nimmt man nämlich zu irgend einem Punkte a die homologe Ebene a', welche durch a geht, und zieht durch a nach irgend einem andern Punkte b der Ebene a' die Gerade g beliebig, so liegt auch die homologe Gerade g' in a'; die homologe Ebene zum Punkte b enthält b und g', ist aber von a' verschieden; folglich liegt b in g', d. h. g fällt mit g' zusammen, jede Gerade in a' durch a ist sich selbst homolog, a der homologe Punkt zu a'. Man kann also je zwei homologe Elemente mit einander vertauschen. Sind nun u und v sich selbst homologe Geraden, die keinen Punkt gemein haben, ikl . . . sich selbst homologe Geraden, die u und v schneiden, so werden durch die letzteren projective Punktreihen auf den beiden ersteren erzeugt, da das Ebenenbüschel $u(ikl\ldots)$ der Punktreihe $u(ikl\ldots)$ projectiv und der Punktreihe $v(ikl\ldots)$ perspectiv ist; und so gelangt man zu den oben für das Nullsystem angegebenen Constructionen.

Wenn man bei einer Reciprocität die homologen Elemente mit einander vertauschen kann, so heisst die homologe Ebene eines Punktes seine Polare, der homologe Punkt einer Ebene ihr Pol, die homologe Gerade einer Geraden ebenfalls deren Polare, je zwei homologe Figuren polarreciprok, die Beziehung eine Polarreciprocität. Von den Paaren, welche mittels einer solchen Beziehung entstehen, sagt man, dass sie ein Polarsystem bilden. Das Nullsystem gehört zu den Polarsystemen; ein Polarsystem, bei welchem nicht jeder Punkt in seiner Polare liegt, heisst ein gewöhnliches Polarsystem. —

Einen beliebig gegebenen Punkt O und eine beliebig gegebene Ebene P kann man zu homologen Elementen einer dualen Beziehung machen. Dadurch wird jeder durch O gehenden Ebene ein in P gelegener Punkt, jeder durch O gehenden Geraden eine in P gelegene Gerade zugeordnet, und umgekehrt; man erhält eine reciproke Beziehung zwischen den beiden Gebilden zweiter Stufe. Um die durch den Punkt O gehenden Ebenen und Geraden auf die Punkte und Geraden der Ebene P reciprok zu beziehen, kann man zu vier an O liegenden Ebenen, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, die homologen Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen dürfen, oder zu vier an O liegenden Geraden, von denen keine drei einer Ebene angehören, die homologen Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen dürfen, beliebig wählen, und zwar ist durch solche vier Paare die Zuordnung vollkommen bestimmt. — Bei den Gebilden zweiter Stufe giebt es aber noch zwei andere Zuordnungsarten, welche man duale oder reciproke nennt. Geht man von einer ebenen Figur zu einer reciproken centrischen, von dieser zu einer collinearen ebenen über, so heissen die beiden Planfiguren dual oder reciprok; dabei ist jedem Punkte der einen eine Gerade der andern zugeordnet. Um zwischen zwei Ebenen eine solche Beziehung herzustellen, kann man zu vier Punkten der einen, von denen keine drei in gerader Linie liegen, die homologen Geraden beliebig wählen, jedoch so, dass keine drei durch einen Punkt gehen; vier solche Paare bestimmen die ganze Beziehung. Geht man von einer centrischen Figur zu einer reciproken ebenen, von dieser zu einer collinearen centrischen über, so heissen die beiden centrischen Figuren dual oder reciprok; jeder Geraden der einen entspricht eine Ebene der andern. Ordnet man vier durch einen Punkt gehenden Geraden, von denen keine drei in einer Ebene liegen, vier ebenfalls durch einen Punkt gehende Ebenen zu, von denen keine drei eine Gerade gemein haben, so wird dadurch eine und nur eine duale Zuordnung centrischer Figuren bewirkt.

Reciproke einförmige Gebilde sind projectiv; umgekehrt können zwei projective einförmige Gebilde auch reciprok genannt werden, ausgenommen den Fall zweier Punktreihen oder zweier Ebenenbüschel. Dass die homologen einförmigen Gebilde projectiv sind, ist eine Eigenschaft, welche die reciproken Figuren mit den collinearen gemein haben. Man nennt aus diesem Grunde auch je zwei reciproke Figuren projectiv. Aber mit der Collineation und der Reciprocität sind alle Zuordnungsarten erschöpft, bei denen jedem einförmigen Gebilde ein projectives einförmiges Gebilde entspricht.

Ueber die reciproken Gebilde zweiter Stufe ist noch Folgendes zu bemerken. Duale Planfiguren kann man in derselben Ebene annehmen; wenn alsdann die homologen Elemente vertauschbar sind, so heisst die homologe Linie eines Punktes seine Polare, der homologe Punkt einer Linie ihr Pol. Duale centrische Figuren können an demselben Scheitel liegen; wenn alsdann die homologen Elemente vertauschbar sind, so heisst jedes Element die Polare des homologen. So oft überhaupt duale Gebilde zweiter Stufe aufeinanderliegen (an einerlei Ebene oder an einerlei Scheitel) und die homologen Elemente vertauschbar sind, nennt man je zwei homologe Figuren polarreciprok, die Beziehung eine Polarreciprocität, und von den Paaren, welche durch eine solche Beziehung entstehen, sagt man, dass sie ein (ebenes oder centrisches) Polarsystem bilden.

Schliesslich führen wir einige Sätze an, welche für alle Arten von Reciprocität und Collineation gelten:

Wenn die eine von zwei reciproken Figuren eine gewisse projective Eigenschaft besitzt, so hat die andere die reciproke Eigenschaft.

Zwei Figuren, die einer dritten reciprok sind, sind collinear.

Eine Figur, die zu der einen von zwei collinearen Figuren reciprok ist, ist es auch zur andern.

Zwei Figuren, die zu einer dritten projectiv sind, sind projectiv.

§ 19. Congruente Figuren in der eigentlichen Ebene.

In § 17 war die Congruenz als eine besondere Collineation erkannt worden. Es soll nun eine Eigenthümlichkeit hergeleitet werden, durch welche sich die Congruenz von andern Collineationen unterscheidet. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, von den vorstehenden Erörterungen über die Reciprocität Gebrauch zu machen. Zuvor jedoch ist es nöthig, die Congruenz in der eigentlichen Ebene zu betrachten.

Dass congruente Figuren alle Eigenschaften, welche sich nur auf das Aneinanderliegen der Elemente und die Anordnung von eigentlichen Punkten in Geraden beziehen, und mithin insbesondere alle graphischen Eigenschaften gemein haben, ist schon in § 14 (Seite 112 und 114) hervorgehoben worden. *Es haben aber congruente Figuren überhaupt alle Eigenschaften gemein, welche sich mit den bisher eingeführten Begriffen definiren lassen.* Denn diese Begriffe umfassen ausser dem Aneinanderliegen der Elemente und der Anordnung von eigentlichen Punkten in Geraden nur noch den der Congruenz; so oft aber in der einen von zwei congruenten Figuren

congruente Theile vorkommen, sind auch die homologen Theile der andern Figur congruent (§ 14 Seite 115).

Congruente (aber verschiedene) Punktreihen, welche auf einer und derselben eigentlichen Geraden f liegen, haben niemals mehr als einen eigentlichen Punkt entsprechend gemein (§ 14 Seite 115). *Ist ein eigentlicher Doppelpunkt b vorhanden, so ist die Beziehung involutorisch und durch den Punkt b bestimmt;* denn nimmt man auf f den eigentlichen Punkt a beliebig und nennt c den homologen Punkt, so sind die Paare ba und bc congruent, a und c auf verschiedenen Seiten von b gelegen, folglich für c nur eine einzige Lage möglich, und der homologe Punkt zu c ist a. Umgekehrt: *Ist die Beziehung involutorisch, so existirt ein eigentlicher Doppelpunkt b;* denn sind a und c homologe eigentliche Punkte, b die Mitte der Strecke ac, b' der homologe Punkt, also acb und cab' congruent, so ist b' die Mitte der Strecke ca und folglich mit b identisch. Je zwei in dieser Weise auf einander bezogene Punktreihen einer eigentlichen Geraden heissen **invers congruent**. Sie besitzen ausser dem eigentlichen Doppelpunkte b noch einen uneigentlichen Doppelpunkt β (vergl. § 14 Seite 117), welcher auf der Geraden f durch b völlig bestimmt wird; wir wollen β den mit b **verknüpften***) Punkt der Geraden f nennen. Der Mittelpunkt einer Strecke ac wird allemal durch ihre Endpunkte von dem mit der Mitte verknüpften Punkte der Geraden ac harmonisch getrennt.

Liegen zwei congruente Punktreihen auf einer und derselben eigentlichen Geraden f, ohne einen eigentlichen Punkt entsprechend gemein zu haben, so sind sie nicht involutorisch und heissen **direct congruent**. Ist dann dem eigentlichen Punkte a der Punkt b, diesem der Punkt c zugeordnet und β der mit b verknüpfte Punkt der f, so sind a, b, c von einander verschieden, ab und bc congruent, b die Mitte der Strecke ac, $acb\beta$ harmonisch, und es kann also der am Schluss des § 16 bewiesene Satz auf die Paare $b\beta$ angewendet werden. Der Punkt β ist danach entweder für alle Lagen von b derselbe, oder er verändert sich immer mit b. Im ersten Falle nennen wir β den **absoluten****) **Punkt** der Geraden f; im zweiten Falle bilden die Paare $b\beta$ eine Involution, welche die **absolute Involution** auf der Geraden f genannt werden soll. —

*) Vgl. Reye, Crelle's Journal Bd. 82 S. 174.

**) Das Prädicat „absolut" wird hier und im Folgenden in dem von Cayley, Phil. Trans. Vol. 149 (1859), eingeführten Sinne gebraucht.

Zwei identische Punktreihen auf f sind einander stets congruent und zwar zu den direct congruenten zu rechnen.

Beim Uebergange von einer Figur zu einer congruenten gehen je zwei verknüpfte Punkte der Geraden f in verknüpfte Punkte der entsprechenden Geraden über. Wenn daher f einen absoluten Punkt besitzt, so gilt dies auch von jeder andern eigentlichen Geraden. Es sind dann auf jeder eigentlichen Geraden alle eigentlichen Punkte mit dem absoluten Punkte der Geraden verknüpft; die Beziehung zwischen zwei direct congruenten Punktreihen auf der eigentlichen Geraden ist nach der in § 16 eingeführten Ausdrucksweise eine Aequivalenz, welche den absoluten Punkt zum Grenzpunkte hat; je zwei direct congruente Punktpaare der eigentlichen Geraden sind für deren absoluten Punkt äquivalent. Wenn aber f eine absolute Involution besitzt, so erhält man auch auf jeder andern eigentlichen Geraden eine absolute Involution.

Hiernach giebt es entweder auf jeder eigentlichen Geraden einen absoluten Punkt oder auf jeder eigentlichen Geraden eine absolute Involution. Nimmt man das erstere an, so erhält man die Euklidische Geometrie; die letztere Annahme hingegen führt zu Nichteuklidischer Geometrie. Welche Annahme der Wirklichkeit entspricht, werden wir hier unentschieden lassen; aus den der bisherigen Entwickelung zu Grunde gelegten Thatsachen geht eine Entscheidung der Frage nicht hervor. —

Congruente (aber verschiedene) Figuren in einer eigentlichen Ebene E haben niemals drei eigentliche Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, entsprechend gemein (§ 14 Seite 115). *Wenn zwei eigentliche Punkte a, b sich selbst entsprechen sollen, so müssen alle Punkte der Verbindungslinie f von a und b sich selbst entsprechen, die Beziehung wird durch die eigentliche Gerade f völlig bestimmt, und je zwei homologe Punkte sind vertauschbar.* Denn nimmt man in der Ebene E den eigentlichen Punk c ausserhalb der f beliebig und nennt d den homologen Punkt, so sollen in der Ebene E die Figuren abc und abd congruent sein, d ist also nach dem IX. Grundsatz in § 13 bestimmt, und zwar müssen c und d auf verschiedenen Seiten der f liegen; der eigentliche Punkt γ, in welchem die Geraden f und cd sich treffen, entspricht sich selbst, ebenso die [illegible] entstehenden congruenten Punktrei[illegible] [illegible]en mithin involutorisch, und [illegible] beiden Figuren haben noch [illegible] der f, nämlich den auf cd

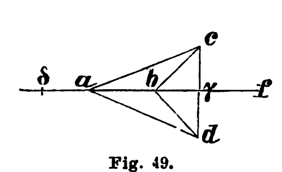


Fig. 49.

mit γ verknüpften Punkt, aber sonst keinen ausserhalb der f gelegenen Punkt (§ 17) entsprechend gemein. Der Punkt F heisst der **absolute Pol** der Geraden f in der Ebene E und ist mit jedem eigentlichen Punkte δ der f verknüpft; denn bei der vorhin betrachteten Congruenz entspricht die Gerade δF sich selbst, und es liegen auf ihr congruente Punktreihen mit den Doppelpunkten δ und F.

Eine Congruenz dieser Art entsteht, wenn man auf zwei durch einen eigentlichen Punkt S gezogenen Strahlen b, c von S aus congruente Strecken SP, SQ aufträgt. Nach dem V. Grundsatze in § 13 sind die Figuren PSQ und QSP congruent; dabei entspricht die Gerade PQ sich selbst, ebenso die Mitte der Strecke PQ, überhaupt alle Punkte des Strahls f, welcher diese Mitte mit S verbindet.

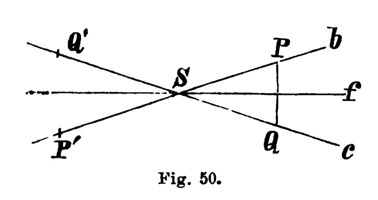


Fig. 50.

— Auch b und c, c und b sind homolog; folglich *sind die Figuren bc und cb congruent.* — Wenn insbesondere c einen absoluten Pol B von b enthält, so kann man einen Punkt C so angeben, dass die Figuren bcB und cbC congruent werden; es liegt dann C in b und ist der absolute Pol von c in der Ebene bc; die Beziehung zwischen den Strahlen b und c ist also gegenseitig, die Strahlen werden auf einander **senkrecht** genannt. In jedem Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel steht jeder Strahl auf einem und nur einem Strahle des Büschels senkrecht, und diese beiden Strahlen sind von einander verschieden. Aus jedem eigentlichen Punkte kann man nach jeder nicht an ihm gelegenen eigentlichen Geraden eine und nur eine Senkrechte ziehen.

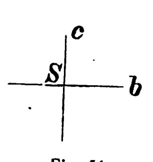


Fig. 51.

Ausserdem bieten sich hier noch folgende Sätze dar.

1. Trägt man auf zwei durch einen eigentlichen Punkt S gezogenen Strahlen b, c von S aus congruente Strecken SP, SQ und auf den anderen Schenkeln der Strahlen b, c von S aus congruente Strecken SP', SQ' auf, so sind die Figuren $P'SQ$ und $Q'SP$ congruent.

Beweis: Da die Figuren SPQ und SQP congruent sind, so giebt es einen Punkt Q_1 derart, dass die Figuren $P'SPQ$ und Q_1SQP congruent ausfallen; Q_1 liegt in der Geraden SQ, d. i. c, aber nicht im Schenkel SQ. Die Strecken SQ_1 und SP' sind congruent, folglich auch SQ_1 und SQ', Q_1 mit Q' identisch, $P'SPQ$ und $Q'SQP$ congruent.

2. Liegen in einer Ebene die eigentlichen Punkte $ABCD$ der-

art, dass die Strecken AC und AD congruent sind, ebenso BC und BD, so sind die Figuren $ABCD$ und $ABDC$ congruent.

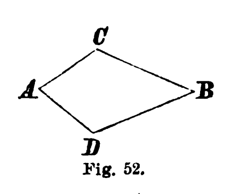


Fig. 52.

Beweis: Sollten ACD in eine Gerade fallen und zugleich auch BCD, so kann A sich nicht von B unterscheiden. Ich nehme daher an, dass etwa ACD nicht in gerader Linie liegen; dann sind die Figuren ACD und ADC congruent, und ich kann in der Ebene ACD den Punkt B_1 so wählen, dass die Figuren $ABCD$ und AB_1DC congruent ausfallen. Liegen A und B auf derselben Seite von CD, so gilt dies auch von A und B_1, und umgekehrt; folglich liegen B und B_1 nicht auf verschiedenen Seiten von CD. Da nun BCD und BDC, BCD und B_1DC, folglich BDC und B_1DC congruent sind, so ist B_1 mit B identisch.

3. Liegen die eigentlichen Punkte ABC beliebig und die eigentlichen Punkte $A'B'C'$ derart, dass die Strecken AB, AC, BC resp. den Strecken $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ congruent sind, so sind die Figuren ABC und $A'B'C'$ congruent.

Beweis: In einer durch ABC gelegten Ebene kann ich den Punkt D so wählen, dass ABD und $A'B'C'$ congruent werden. Es sind dann AC und AD, BC und BD congruent, folglich nach dem vorigen Satze ABC und ABD.

4. Wenn in einer eigentlichen Ebene E zwei congruente Figuren derart liegen, dass zwei eigentliche Punkte PP' einander in beiderlei Sinn entsprechen, und dass sich zwei auf verschiedenen Seiten der Geraden PP' gelegene homologe eigentliche Punkte QQ' vorfinden, so ist die Mitte S der Strecke PP' und jeder in der Ebene E durch S gezogene Strahl sich selbst zugeordnet, und je zwei homologe eigentliche Punkte liegen auf verschiedenen Seiten von S.

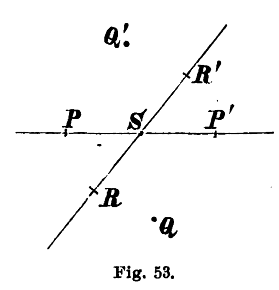


Fig. 53.

Beweis: Zunächst entspricht der Strahl PP' sich selbst, auf ihm liegen zwei invers congruente Punktreihen mit dem Doppelpunkte S, die Strecken SP und SP' sind congruent. Auf irgend einem andern Strahle des Büschels S in der Ebene E mache man von S aus die Strecken SR und SR' mit SP und SP' congruent, indem man etwa R mit Q, also R' mit Q' auf einerlei Seite von PP' annimmt, und nenne R_1 den homologen Punkt zu R. Nach Satz 1. sind $P'SR$ und $R'SP$ congruent, folglich sind es auch $P'SR$ und PSR', PSR_1 und PSR'; überdies liegen Q' und R_1, also auch R' und

R_1 auf einerlei Seite von PP'. Hiernach fällt R_1 mit R' zusammen, R und R' sind homolog.

5. Wenn in einer eigentlichen Ebene E zwei congruente Figuren derart liegen, dass zwei eigentliche Punkte PP' einander in beiderlei Sinn entsprechen, und dass sich zwei auf derselben Seite der Geraden PP' gelegene zugeordnete eigentliche Punkte QQ' vorfinden, so sind alle Punkte der Geraden f, welche in der Ebene E auf der Geraden PP' im Mittelpunkte S der Strecke PP' senkrecht steht, sich selbst homolog.

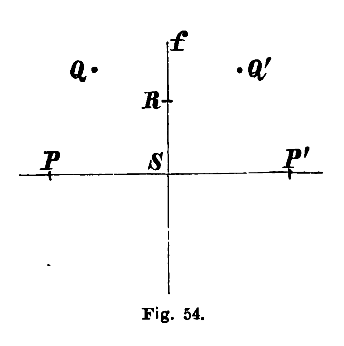


Fig. 54.

Beweis: Da der Strahl PP' und der Punkt S sich selbst entsprechen, so fällt auch der Strahl f mit dem homologen zusammen. Auf f nehme ich den eigentlichen Punkt R, mit Q und Q' auf einerlei Seite von PP', und nenne R' den homologen Punkt; da R' mit Q', also R mit R' auf einer Seite von PP' liegen muss, so fällt R' mit R zusammen.

6. Werden durch einen eigentlichen Punkt S zwei Strahlen b und c, nicht senkrecht zu einander, gezogen, so liegt im Büschel bc ein und nur ein von c verschiedener Strahl c', welcher congruente Figuren bc und bc' ergiebt.

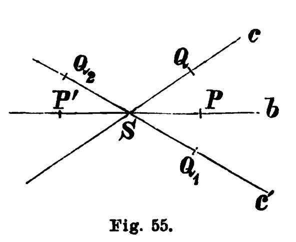


Fig. 55.

Beweis: Ich nehme auf c den eigentlichen Punkt Q beliebig (von S verschieden). Sollen bei einer Congruenz in der Ebene bc die Elemente b und S sich selbst entsprechen, aber nicht c, so müssen auf b entweder alle Punkte sich selbst zugeordnet oder eine inverse Congruenz mit dem Doppelpunkte S angenommen werden. Ist im ersteren Falle Q_1 der homologe Punkt zu Q, so geht die Gerade QQ_1 durch den absoluten Pol der b in der Ebene bc, d. h. sie steht auf b senkrecht und ist also von c verschieden, Q_1 nicht in c gelegen; die hiernach von c verschiedene Verbindungslinie c' der Punkte S und Q_1 ist mit c homolog. Im zweiten Falle seien Q und Q_2 zugeordnete Punkte; aus Satz 4. wird man folgern, dass sie auf einerlei Seite von b liegen müssen, also Q_1 und Q_2 auf verschiedenen Seiten. Macht man auf b die Strecken SP und SP' congruent, so sind SPQ und $SP'Q_2$ congruent, zugleich SPQ und SPQ_1, folglich SPQ_1 und $SP'Q_2$, $SPP'Q_1$ und

$SP'PQ_2$. Nach Satz 4. fallen daher die Strahlen SQ_1 und SQ_2 zusammen, und man erhält wieder c' als zugeordneten Strahl zu c.

7. Wird bei einer Congruenz in einem Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel S der Strahl b sich selbst zugeordnet, so ist auch der auf b senkrechte Strahl β des Büschels ein Doppelstrahl, und es werden entweder je zwei homologe Strahlen durch $b\beta$ harmonisch getrennt, oder es entspricht jeder Strahl sich selbst.

Beweis: Der homologe Strahl zu β ist senkrecht zu b, also mit β identisch. Ich nehme nun im Büschel $b\beta$ einen dritten Strahl c und nenne c' den homologen Strahl. Fallen c und c' zusammen, so gilt dies von allen Strahlen; anderenfalls gehört zu c' ein von c' verschiedener homologer Strahl d, welcher bc' und bd, also bc und bd congruent macht und mithin nach dem vorigen Satze von c nicht verschieden sein kann, die Beziehung ist also involutorisch und hat die beiden Doppelstrahlen $b\beta$.

Zwei congruente (aber verschiedene) Strahlenbüschel in einer Ebene, welche einen und denselben eigentlichen Punkt zum Scheitel haben, heissen invers congruent, wenn Doppelstrahlen vorkommen, anderenfalls direct congruent. Zwei identische Strahlenbüschel sind allemal zu den direct congruenten zu rechnen.

Invers congruente Büschel liegen in Involution und haben zwei auf einander senkrechte Doppelstrahlen, die Beziehung ist durch einen Doppelstrahl bestimmt; nach Satz 4. ist auf dem einen Doppelstrahl jeder Punkt sich selbst homolog, während auf dem andern invers congruente Punktreihen liegen; nach § 16 (Seite 131) wird kein Paar homologer Strahlen durch ein anderes getrennt.

8. Wird durch den eigentlichen Punkt S irgend eine Ebene E angenommen, so liegen die in der Ebene E mit S verknüpften Punkte auf einer Geraden.

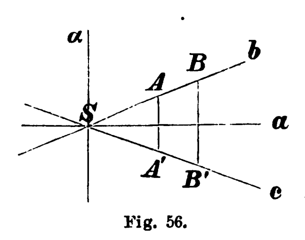


Fig. 56.

Beweis: In der Ebene E lege ich durch S zwei senkrechte Strahlen $a\alpha$, einen beliebigen dritten Strahl b und zu αb den vierten harmonischen Strahl c, so dass ab und ac congruent werden. Sind $a_1\alpha_1 b_1 c_1$ die resp. auf $a\alpha bc$ mit S verknüpften Punkte, so sind $a_1\alpha_1$ die absoluten Pole resp. von αa in der Ebene E. Ich stelle nun in der Ebene E eine Congruenz auf, bei welcher alle Punkte der a sich selbst, die Strahlen bc einander entsprechen; auch b_1 und c_1 werden homolog, und den eigentlichen Punkten AB der b werden $A'B'$ auf c zugeordnet. Die Punktreihen $SABb_1$, $SA'B'c_1$ sind perspectiv, die Strahlen AA' und BB' stehen senkrecht auf a und

treffen sich in α_1, folglich geht $b_1 c_1$ durch α_1. Aber dann muss $b_1 c_1$ ebenso durch a_1 gehen, d. h. auf der Geraden $a_1 \alpha_1$ liegt b_1 und mithin jeder mit S verknüpfte Punkt der Ebene E.

Diese Gerade heisse die absolute Polare des Punktes S in der Ebene E. Sie enthält den Punkt S nicht, ist überhaupt eine uneigentliche Gerade; jeder ihrer Punkte ist mit S verknüpft. Sie ist zugleich der Ort der absoluten Pole, welche in der Ebene E zu den in dieser Ebene durch S gelegten Strahlen gehören.

9. Liegen an einem eigentlichen Punkte S und an einer Ebene zwei congruente Strahlenbüschel derart, dass zwei nicht senkrechte Strahlen cc' einander in beiderlei Sinn entsprechen, so sind die Büschel invers congruent; die Beziehung ist durch das Paar cc' bestimmt.

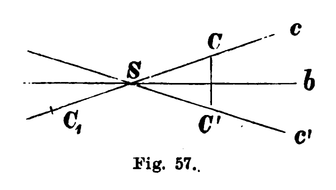


Fig. 57.

Beweis: Machen wir auf c die Strecken SC und SC_1 congruent und nennen C' den auf c' gelegenen homologen Punkt zu C, so werden SC und SC' congruent. Der homologe Punkt zu C' soll auf c liegen und ist daher C; denn sonst wären $C'C_1$ homolog, SCC' und $SC'C_1$ congruent, also SCC' und SC_1C' congruent, c auf c' senkrecht. Folglich entspricht die Gerade CC' sich selbst, ebenso die Mitte der Strecke CC' und der Strahl b, welcher diese Mitte mit S verbindet, u. s. w.

10. In jedem Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel bilden die Paare senkrechter Strahlen $b\beta$ eine Involution.

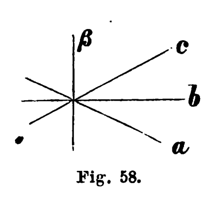


Fig. 58.

Beweis: Nimmt man in dem Büschel den Strahl a beliebig, aber von b und β verschieden, so sind ab homologe Strahlen einer, nach Satz 6. völlig bestimmten, nicht involutorischen (also directen) Congruenz in dem Büschel; dem Strahle b entspricht ein von a und b verschiedener Strahl c, welcher ba und bc congruent macht. Zu $ac\beta$ ist β der vierte harmonische Strahl. Mit b variirt nun β, und die Paare $b\beta$ bilden eine Involution nach § 16 extr.

Diese Involution soll die absolute Involution in dem Strahlenbüschel genannt werden; sie hat keine Doppelstrahlen.

11. In jedem Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel S wird durch Zuordnung zweier beliebiger Strahlen eine directe Congruenz bestimmt.

Beweis: Sind die beiden Strahlen nicht senkrecht, so folgt die Behauptung, wie bereits im vorigen Beweise erwähnt wurde, aus Satz 6. Werden aber zwei senkrechte Strahlen $a\alpha$ einander zu-

geordnet, so muss die Beziehung involutorisch werden. Es seien dann AB homologe eigentliche Punkte resp. von $a\alpha$, und auf a seien die Strecken SA, SC congruent. Dem Punkte B ist A oder C zugeordnet; wäre es A, so gäbe es nach Satz 5. einen Doppelstrahl; folglich sind BC homolog. Man ziehe nun einen Strahl b des Büschels zwischen A und B hindurch und nenne β den (in beiderlei Sinn) homologen Strahl. Da β zwischen B und C hindurchgeht, so werden $a\alpha$ durch $b\beta$ getrennt, die durch die Paare SS, AB, BC bestimmte Congruenz ist direct, die Strahlen $b\beta$ stehen aufeinander senkrecht. Durch die beiden Paare $a\alpha$, $b\beta$ ist die Involution bestimmt, sie fällt daher mit der absoluten Involution des Büschels zusammen.

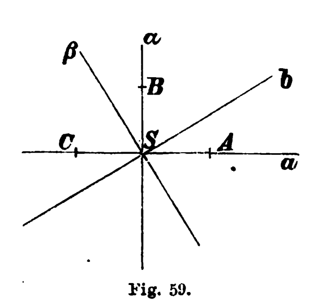


Fig. 59.

Die directe Congruenz im Strahlenbüschel ist hiernach im Allgemeinen nicht involutorisch, nur die absolute Involution des Büschels ist als eine directe Congruenz aufzufassen. Je zwei senkrechte Strahlen des Büschels werden durch jedes andere Paar senkrechter Strahlen desselben getrennt.

12. Sind zwischen drei eigentlichen Punkten ABC senkrechte Strahlen AB, AC gezogen und aus A nach BC eine Senkrechte gefällt, welche der BC in a begegnet, so liegt a zwischen B und C.

Beweis: Läge etwa C zwischen a und B, so müsste der Schnittpunkt β der AB mit der auf BC im Punkte C und in der Ebene ABC errichteten Senkrechten zwischen A und B fallen. Errichtet man in derselben Ebene $C\gamma$ senkrecht auf AC, so wären die Senkrechten CA, $C\gamma$ durch die Senkrechten CB, $C\beta$ nicht getrennt.

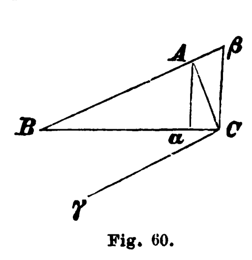


Fig. 60.

13. Liegen die eigentlichen Punkte ABC beliebig, nicht in gerader Linie, und werden die Geraden BC, CA, AB von den resp. aus A, B, C nach ihnen gefällten Senkrechten in a, b, c getroffen, so liegt entweder a zwischen B und C, oder b zwischen C und A, oder C zwischen A und B.

Beweis: Nehmen wir an, dass etwa b nicht zwischen C und A liegt, sondern A zwischen b und C. Die Senkrechte auf AC in A und in der Ebene ABC trifft dann BC in β zwischen B und C (oder in B selbst), folglich liegt a zwischen β und C (Satz 12), d. i. zwischen B und C.

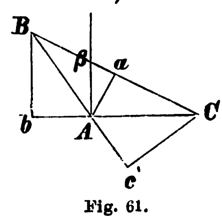


Fig. 61.

14. Wird der eigentliche Punkt S sich selbst, der Schenkel SF' dem Schenkel SF zugeordnet, so wird dadurch in der Ebene SFF' eine und nur eine Congruenz bestimmt, bei welcher das Büschel S in ein direct congruentes übergeht.

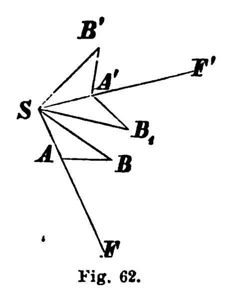


Fig. 62.

Beweis: Dem eigentlichen Punkte A im Schenkel SF entspricht ein bestimmter Punkt A' im Schenkel SF'. Wird der eigentliche Punkt B in der Ebene SFF' ausserhalb des Strahles SF und der in dem Büschel gelegenen Senkrechten gewählt, so giebt es in der Ebene SFF' zwei Punkte B' und B_1, welche $SA'B'$ und $SA'B_1$ mit SAB congruent machen. Die Strahlen SB' und SB_1 fallen nicht zusammen; einer von ihnen, etwa SB', ist dem Strahle SB zuzuordnen (10), und B' ist dann der homologe Punkt zu B.

Wenn eine Figur durch eine solche Congruenz in eine andere übergeht, so sagt man, sie sei in der Ebene SFF' um S gedreht. Hierher gehört insbesondere diejenige Congruenz, bei der je zwei homologe Punkte mit S auf einer Geraden liegen (vgl. Satz 4).

15. Wird die eigentliche Gerade g der Ebene E sich selbst und auf g dem eigentlichen Punkte A der Punkt A' zugeordnet, so wird dadurch in der Ebene E eine und nur eine Congruenz bestimmt, bei welcher auf g direct congruente Punktreihen entstehen und zwei homologe eigentliche Punkte (B, B') auf einerlei Seite der g sich vorfinden.

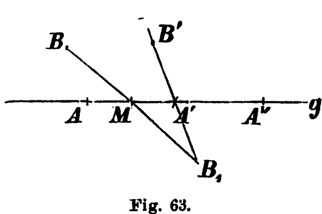


Fig. 63.

Beweis: Der Punkt A' soll nicht in A, sondern etwa in A'' übergehen. Ist nun M die Mitte der Strecke AA', so drehe man zuerst um M so, dass A nach A' gelangt; dabei geht A' in A, B in B_1 über, B und B_1 liegen in der Geraden MB auf verschiedenen Seiten der g. Hierauf drehe man um A' so, dass A nach A'' gelangt; dabei muss B_1 in B' übergehen, und man erkennt also zugleich, dass die Strecke B_1B' in A' ihren Mittelpunkt besitzt.

Wenn eine Figur durch eine solche Congruenz in eine andere übergeht, so sagt man, sie sei in der Ebene E längs der Geraden g verschoben. Die Verschiebung lässt sich auf zwei Drehungen zurückführen.

§ 20. Die absoluten Polarsysteme*).

Wir werden jetzt an den Begriff der absoluten Polare anknüpfen. Es seien RST eigentliche Punkte in einer Ebene E, rst ihre absoluten Polaren in E; die Gerade RS wird von r in dem mit R verknüpften Punkte R', von s in dem mit S verknüpften S' geschnitten; r und s enthalten den absoluten Pol der RS in E. Macht man nun die Annahme, welche zur Euklidischen Geometrie führt, so fällt R' mit S' zusammen, nämlich in den absoluten Punkt der RS, folglich haben r und s zwei Punkte gemein und fallen in eine und dieselbe Gerade e, welche die absolute Gerade der Ebene E genannt werden mag. Jeder eigentliche Punkt der Ebene E hat e zur absoluten Polare, von jeder eigentlichen Geraden enthält e den absoluten Pol und schneidet sie in ihrem absoluten Punkte. Aus der in E zum Punkte R gehörigen absoluten Involution $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ... schneidet e involutorische Punktepaare $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$, ... heraus; zieht man nun in E durch S den Strahl α' senkrecht zu a, den Strahl a' senkrecht zu α', so treffen sich α und α' in α_1, a und a' in a_1, d. h. e schneidet auch aus der in E zu S gehörigen absoluten Involution die Punktepaare $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$, ... heraus. Die so auf e entstehende Involution mag die absolute Involution der Ebene E genannt werden; je zwei Paare derselben liegen getrennt, Doppelpunkte sind nicht vorhanden.

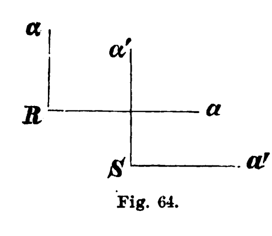


Fig. 64.

Wesentlich anders gestaltet sich die Sache bei derjenigen Annahme, welcher Nichteuklidische Geometrie entspricht. Hier ist R' von S', r von s verschieden, der Punkt rs der absolute Pol der RS in E; in gleicher Beziehung steht der Punkt st zur Geraden ST, der Punkt rt zur Geraden RT. Gehen rst durch einen Punkt, so liegen RST auf einer Geraden; denn jener Punkt ist dann absoluter Pol der RS und der RT, mithin RS mit RT identisch.

---

*) Cayley hat bemerkt, dass die metrischen Eigenschaften der Figuren in der Euklidischen Geometrie als specielle Fälle von projectiven Eigenschaften erscheinen, wenn man gewisse Gebilde zuzieht, welche hier durch ein „absolutes Polarsystem" vertreten werden; vgl. die auf Seite 146 citirte Abhandlung. Diese Theorie hat Herr F. Klein (Math. Ann. Bd. 4 S. 573 ff.) auf die Nichteuklidische Geometrie ausgedehnt und aus anderen Gesichtspunkten beleuchtet.

Sind also $ABCD$ eigentliche Punkte der E, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und $abcd$ ihre absoluten Polaren in E, so gehen von diesen keine drei durch einen Punkt, und es wird in der Ebene E durch die Paare Aa, Bb, Cc, Dd eine Reciprocität bestimmt, bei welcher den Geraden AB, AC, AD ihre absoluten Pole β, γ, δ (d. i. ab, ac, ad) entsprechen. Es werde mit P ein fünfter eigentlicher Punkt der E, mit ε der dem Strahle AP zugeordnete (mit β, γ, δ auf a gelegene) Punkt bezeichnet. Die Figuren $A(BCDP)$ und $\beta\gamma\delta\varepsilon$ werden projectiv, $\beta\gamma\delta\varepsilon$ und $A(\beta\gamma\delta\varepsilon)$ perspectiv, folglich $A(BCDP)$ und $A(\beta\gamma\delta\varepsilon)$ projectiv; die Strahlen AB und $A\beta$ bilden ein Paar der absoluten Involution in demselben Büschel, ebenso AC und $A\gamma$, AD und $A\delta$, folglich gilt dies auch von AP und $A\varepsilon$, d. h. ε ist absoluter Pol der AP. In gleicher Weise liefern bei jener Reciprocität BP, CP, DP als homologe Punkte ihre absoluten Pole, mithin P als homologe Gerade seine absolute Polare. Ueberhaupt ist jedem eigentlichen Punkte seine absolute Polare, jeder eigentlichen Geraden ihr absoluter Pol zngeordnet, die Reciprocität von den Punkten $ABCD$ unabhängig. Sind nun α' und β' die homologen Punkte zu den Geraden $A\beta$ und $B\beta$, also $\alpha'\beta'$ die homologe Gerade zu β, so liegen α' und β' auf der Geraden AB, welche somit dem Punkte β entspricht; ebenso ist AC die homologe Gerade zu γ, also A der homologe Punkt zu a. Da hiernach auch die Paare aA, bB, cC, dD der betrachteten Beziehung angehören, so ist diese als Polarreciprocität zu bezeichnen; wir nennen sie die absolute Polarreciprocität der Ebene E, die Paare homologer Elemente bilden das absolute Polarsystem der Ebene E.

Indem wir jetzt aus der Ebene heraustreten und zunächst die Euklidische Geometrie von der andern nicht trennen, betrachten wir einen Strahl e durch den eigentlichen Punkt P, drei auf e senkrechte Strahlen fgh durch P und einen beliebigen Strahl k des Büschels fg. Mit A und B bezeichnen wir eigentliche Punkte von f resp. g auf verschiedenen Seiten von k, so dass k von der Geraden AB in einem eigentlichen Punkte C geschnitten wird; auf e machen wir die Strecken PD, PD' congruent. Es werden dann AD und AD' congruent, ebenso BD und BD', folglich auch ABD und ABD', $ABDC$ und $ABD'C$, DC und $D'C$, PCD und PCD', folglich c senkrecht zu k. Die Ebenen eh und fg schnei-

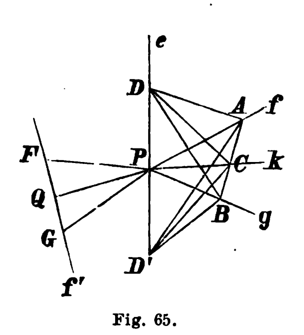


Fig. 65.

den sich daher in einer auf e senkrechten, also mit h identischen Geraden, d. h. h liegt in der Ebene fg. Demnach ist der Ort aller Geraden, welche auf e in P senkrecht stehen, eine Ebene E; man nennt e und E senkrecht zu einander. Durch jeden eigentlichen Punkt geht eine und nur eine Ebene, welche auf einer gegebenen eigentlichen Geraden senkrecht steht. Steht die Gerade e' auf E in Q senkrecht, so steht auch die in E auf PQ durch Q errichtete Senkrechte f' auf e' senkrecht; macht man auf f' die Strecken QF und QG congruent, so werden PF und PG congruent, weiter DF und DG, DQF und DQG, folglich ist f' senkrecht zu DQ, überhaupt zur Ebene eQ, e' in der Ebene eQ, e und e' in einer Ebene [Eukl. XI. 6]. Hiernach geht durch jeden eigentlichen Punkt R eine und nur eine Gerade r, welche auf einer gegebenen eigentlichen Ebene E senkrecht steht; denn liegt R auf E und zieht man in E durch R zwei Strahlen st, sodann durch R zwei auf s resp. t senkrechte Ebenen S und T, so ist die Gerade ST senkrecht auf der Ebene st; liegt aber R nicht auf E, und errichtet man in einem auf E gelegenen eigentlichen Punkte Q die Senkrechte e' auf E, so muss r in die Ebene Re' fallen u. s. w.

Alle Senkrechten auf einer eigentlichen Ebene gehen durch einen (uneigentlichen) Punkt. Wir nennen ihn den absoluten Pol der Ebene; er ist mit allen eigentlichen Punkten der Ebene verknüpft; jede durch ihn gezogene eigentliche Gerade steht auf der Ebene senkrecht; zu jeder eigentlichen Geraden der Ebene ist er absoluter Pol. Werden durch eine eigentliche Gerade zwei Fbenen E und E' derart gelegt, dass E' den absoluten Pol von E enthält, so liegt der absolute Pol von E' in E; jede Senkrechte, auf der Geraden EE' in der einen Ebene errichtet, steht auf der andern Ebene senkrecht; solche Ebenen heissen senkrecht. Jede Ebene, welche eine zur Ebene E senkrechte Gerade enthält, steht senkrecht auf E. Legt man durch einen eigentlichen Punkt drei paarweise senkrechte Ebenen, so sind je zwei Durchschnittslinien auf einander senkrecht.

Durch die eigentliche Gerade g lege man Paare senkrechter Ebenen $a\alpha$, $b\beta$, ... und durch den eigentlichen Punkt P der g eine Ebene senkrecht zu g. Diese Ebene schneidet aus jenen Paaren die Strahlenpaare $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, ... heraus, welche durch P gehen und involutorisch liegen. Also bilden auch die Paare $a\alpha$, $b\beta$, ... im Ebenenbüschel g eine Involution; diese werde die absolute Involution im Ebenenbüschel g genannt. Je zwei Paare derselben liegen getrennt, Doppelebenen sind nicht vorhanden. —

Um die Congruenz im Ebenenbüschel näher zu untersuchen,

stellen wir zuerst folgenden Satz auf: *Sind PQR ... Ebenen an der eigentlichen Geraden g, pqr ... und $p'q'r'$ ... Schnitte des Ebenenbüschels PQR ... mit Ebenen, welche auf g (in A resp. A') senkrecht stehen, so sind die Strahlenbüschel pqr ... und $p'q'r'$ ... congruent.* Beweis: Auf pp', qq', rr' ... verzeichne ich die Paare congruenter Strecken AB $A'B'$, AC $A'C'$, AD $A'D'$, ... je auf derselben Seite der g und nenne M die Mitte der Strecke AA'; die in M auf g senkrechte Ebene wird die Strecken BB', CC' in zwei Punkten N, O schneiden. Da $MNAB$ und $MNA'B'$, $MOAC$ und $MOA'C'$ congruent sind, so ist N die Mitte der BB', O die Mitte der CC', MN senkrecht auf BB', MO auf CC'; die Ebene MNO ist senkrecht auf g, mithin auf P, auf BB', auf CC', demnach BB' und CC' auf NO, $NOBC$ und $NOB'C'$

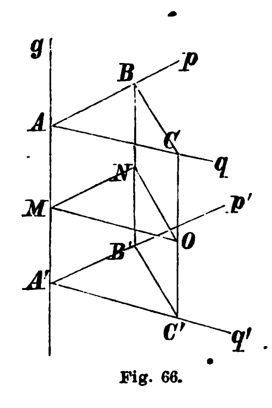


Fig. 66.

congruent, weiter BC und $B'C'$, ABC und $A'B'C'$, ebenso ABD und $A'B'D'$ u. s. w. Liegen nun C und D auf derselben Seite der p, so liegen C und D, C und C', D und D', C' und D' auf derselben Seite der P, folglich C' und D' auf derselben Seite der p'; liegen dagegen C und D auf verschiedenen Seiten der p, so liegen C' und D' auf verschiedenen Seiten der p'. Folglich sind auch $ABCD$ und $A'B'C'D'$ congruent, überhaupt $ABCD$ ... und $A'B'C'D'$ ..., mithin pqr ... und $p'q'r'$ ....

Die hierbei auftretende Congruenz zwischen $ABCD$ ... und $A'B'C'D'$ ... lässt sich erweitern; dabei entsprechen $gPQR$ ... sich selbst, und die auf g entstehende Congruenz ist eine directe, da sonst die drei nicht in gerader Linie gelegenen Punkte MNO sich selbst entsprechen müssten. *Wird die eigentliche Gerade g sich selbst und auf g dem eigentlichen Punkte A der Punkt A' zugeordnet, so wird dadurch eine und nur eine Congruenz bestimmt, bei welcher auf g direct congruente Punktreihen entstehen und zwei homologe eigentliche Punkte in einer Ebene mit g und auf einerlei Seite der g sich vorfinden;* dabei entspricht jede Ebene des Büschels g sich selbst, und jede in einer Ebene mit g enthaltene Figur wird in dieser Ebene längs g verschoben. Wird überhaupt eine Figur durch eine solche Congruenz in eine andere übergeführt, so sagt man, sie werde längs der Geraden g verschoben.

Werden durch die eigentliche Gerade g zwei congruente Ebenenbüschel PQR ... und $P'Q'R'$ ... gelegt und aus diesen durch eine auf g senkrechte Ebene die (concentrischen) Strahlenbüschel pqr ...

und $p'q'r' \ldots$ *herausgeschnitten, so sind* $pqr \ldots$ *und* $p'q'r' \ldots$ *congruent.* — Beweis: Die beiden Ebenenbüschel sind homologe Figuren einer Congruenz, bei welcher g sich selbst entspricht. Schneidet die zur Ebene pq homologe Ebene, welche ebenfalls auf g senkrecht steht, aus $P'Q'R' \ldots$ das Strahlenbüschel $p_1q_1r_1 \ldots$ heraus, so sind pp_1, qq_1, rr_1, ... homolog, mithin $pqr \ldots$ und $p_1q_1r_1 \ldots$ congruent; ausserdem sind $p'q'r' \ldots$ und $p_1q_1r_1 \ldots$ congruent. — *Die Figuren* PQ *und* QP *sind congruent.* Steht P nicht senkrecht auf Q, so liegt im Büschel g eine und nur eine von P verschiedene Ebene Π, welche congruente Figuren PQ und ΠQ ergiebt, und die vierte harmonische Ebene zu $P\Pi Q$ steht senkrecht auf Q.

Die Congruenz der Strahlenbüschel $pqr \ldots$ und $p'q'r' \ldots$ ist entweder für alle Lagen ihrer auf g senkrechten Ebene direct oder für alle diese Lagen invers. Im ersteren Falle heisst die Congruenz der aufeinanderliegenden Ebenenbüschel $PQR \ldots$ und $P'Q'R' \ldots$ direct, im letzteren Falle invers. Ist die Congruenz direct, so entsprechen entweder alle Ebenen sich selbst oder keine; die Beziehung ist durch zwei homologe Ebenen bestimmt und im Allgemeinen nicht involutorisch, nur die absolute Involution des Büschels g ist als eine directe Congruenz aufzufassen. Ist jene Congruenz invers, so ist sie involutorisch und hat zwei zu einander senkrechte Doppelebenen.

Es giebt eine und nur eine Congruenz, bei welcher alle Punkte der eigentlichen Geraden g *sich selbst entsprechen und der Schenkel* gF *in den Schenkel* gF' *übergeht.* Jede auf g senkrechte Ebene E entspricht dabei sich selbst, und in ihr entstehen congruente Strahlenbüschel mit dem Scheitel gE; diese Strahlenbüschel sind direct congruent, weil es sonst auf E ausser gE noch eigentliche Punkte gäbe, welche sich selbst entsprechen; es wird also jede auf E gelegene Figur in E um gE gedreht, und an der Axe g entstehen direct congruente Ebenenbüschel. Wenn eine Figur durch diese Congruenz in eine andere übergeführt wird, so sagt man, sie werde um die Axe g gedreht.

Jede Verschiebung lässt sich auf zwei Drehungen, jede Congruenz auf eine Verschiebung und zwei Drehungen zurückführen. —

Die Betrachtung der Congruenz im Ebenenbüschel war zur Herstellung der absoluten Polarsysteme nicht erforderlich. Wir wenden uns jetzt zuerst zur Erzeugung des absoluten Polarsystemes eines eigentlichen Punktes P und schicken folgende Bemerkungen voraus.

Beschreibt der Strahl c ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel

P, so beschreibt die auf e in P senkrechte Ebene E ein Ebenenbüschel, dessen Axe in P auf der Ebene des Strahlenbüschels senkrecht steht. Beschreibt die Ebene E ein Ebenenbüschel im Bündel P, so beschreibt der auf E in P senkrechte Strahl e ein Strahlenbüschel, dessen Ebene in P auf der Axe des Ebenenbüschels senkrecht steht. Dabei durchlaufen e und E jedesmal projective Gebilde; denn wird E von der Ebene des Strahlenbüschels in f geschnitten, so steht e auf f senkrecht, e und f durchlaufen projective, E und f perspective Gebilde.

Legen wir nun durch P vier Strahlen $abcd$, von denen keine drei an einer Ebene liegen, und durch P senkrecht zu $abcd$ die Ebenen resp. $ABCD$, von denen alsdann keine drei an einer Geraden liegen, so bestimmen die Paare aA, bB, cC, dD eine Reciprocität im Bündel P. Es sei e ein beliebiger Strahl durch P, ε' der auf ae in P senkrechte Strahl, und $\beta\gamma\delta\varepsilon$ seien die homologen Strahlen zu den Ebenen resp. ab ac ad ae, also $\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon'$ auf A gelegen, β senkrecht auf ab, γ auf ac, δ auf ad; dann liegen die Strahlenbüschel $\beta\gamma\delta\varepsilon$ und $\beta\gamma\delta\varepsilon'$ mit dem Ebenenbüschel $a(bcde)$ und mithin unter einander projectiv, ε' ist mit ε identisch, ε auf ae senkrecht. Ebenso liefern be, ce, de senkrechte homologe Strahlen, mithin e eine senkrechte homologe Ebene, so dass im Bündel P jedem Strahle die senkrechte Ebene, jeder Ebene der senkrechte Strahl entspricht. Die Reciprocität ist also von den Strahlen $abcd$ nicht abhängig und ist Polarreciprocität, weil auch die Paare Aa, Bb, Cc, Dd ihr angehören; wir nennen sie die absolute Polarreciprocität des Punktes P, die Paare homologer Elemente bilden das absolute Polarsystem des Punktes P.

Die absoluten Polaren des eigentlichen Punktes P in sämmtlichen Ebenen des Bündels P schneiden sich zu je zweien, gehen aber nicht alle durch einen Punkt, sie liegen mithin auf einer Ebene; diese Ebene ist der Ort der mit P verknüpften Punkte, der Ort der absoluten Pole aller Ebenen des Bündels P, und werde die absolute Polare (Polarebene) des Punktes P genannt. Die absoluten Pole der eigentlichen Geraden g in sämmtlichen Ebenen des Büschels g werden mit dem eigentlichen Punkte A der g durch senkrechte Strahlen zu g, also durch Strahlen eines Büschels verbunden und liegen mithin auf der zu g in A senkrechten Ebene E, und zwar mit A verknüpft, also auf der in der Ebene E zum Punkte A gehörigen absoluten Polare; diese Gerade werde die absolute Polare des Strahles g genannt. Jede auf g senkrechte Ebene E geht durch die absolute Polare des Strahles g, welche der Ebene E die absolute Polare zum Punkte gE darstellt

eigentliche Punkt der g liefert eine absolute Polarebene, welche durch den absoluten Polarstrahl der g hindurchgeht; jede Ebene durch g liefert einen absoluten Pol, welcher auf dem absoluten Polarstrahle der g liegt.

Es seien nun $ABCDE$ eigentliche Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und $abcde$ ihre absoluten Polaren; die Ebenen a und b enthalten die absolute Polare der Geraden AB; die Gerade AB wird von der Ebene a in dem mit A verknüpften Punkte A', von der Ebene b in dem mit B verknüpften Punkte B' getroffen. In der Euklidischen Geometrie fällt A' mit B' zusammen, folglich auch a mit b, d. h. alle eigentlichen Punkte haben dort die nämliche absolute Polarebene, eine uneigentliche Ebene, welche die absolute Ebene heissen mag und jede eigentliche Ebene in ihrer absoluten Geraden schneidet. Wird mit m ein Punkt der absoluten Ebene, mit μ die absolute Polare des Strahles mA, also die absolute Gerade einer auf mA senkrechten Ebene bezeichnet, so ist m der absolute Pol dieser Ebene, welche somit auch auf mB senkrecht steht; folglich hat auch mB die absolute Polare μ, d. h. μ ist durch m allein bestimmt. Wenn m variirt, so bilden die Paare Am, $A\mu$ ein Polarsystem, nämlich das absolute Polarsystem des Punktes A; aus diesem schneidet die absolute Ebene die Paare $m\mu$ heraus, welche somit ebenfalls Paare eines Polarsystemes sind. Das so auf der absoluten Ebene erzeugte Polarsystem kann das absolute Polarsystem genannt werden.

In der Nichteuklidischen Geometrie ist A' von B', a von b verschieden, die Gerade ab die absolute Polare der AB, ebenso ac die absolute Polare der AC u. s. w. Da ABC nicht in gerader Linie liegen, so haben abc nur einen Punkt gemein; denn hätten abc eine Gerade gemein, so hätten die Strahlen AB und AC jene Gerade zur absoluten Polare und stünden in A auf einer Ebene senkrecht. Der Punkt abc ist der absolute Pol der Ebene ABC, ebenso abd der absolute Pol der ABD u. s. w. Hätten $abcd$ einen Punkt gemein, so hätten die Ebenen ABC und ABD jenen Punkt zum absoluten Pol und stünden in A auf einer Geraden senkrecht; die Ebenen $abcd$ gehen also nicht durch einen Punkt, überhaupt keine vier von den Ebenen $abcde$.

Die Paare Aa, Bb, Cc, Dd, Ee bestimmen eine Reciprocität, bei welcher den Ebenen ABC, ABD, ABE ihre absoluten Pole γ, δ, ε (d. i. abc, abd, abe) entsprechen. Es werde mit P ein sechster eigentl [illegible] t ζ der der Ebene ABP zugeordnete (r [illegible] ene) Punkt, mit g die [illegible] P) und $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ wer-

den projectiv, $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $g(\gamma\delta\varepsilon\zeta)$ perspectiv, folglich $g(CDEP)$ und $g(\gamma\delta\varepsilon\zeta)$ projectiv. Die Ebenen $g\gamma$, $g\delta$, $g\varepsilon$ stehen resp. auf den Ebenen gC, gD, gE senkrecht, folglich auch $g\zeta$ auf gP, d. h. ζ ist der absolute Pol der Ebene gP. Demnach entsprechen den Ebenen ABP, ACP, BCP u. s. w. ihre absoluten Pole, dem Punkte P die Ebene dieser Pole, d. i. die absolute Polare von P. Bei jener Reciprocität wird also jedem eigentlichen Punkte seine absolute Polare, jeder eigentlichen Ebene ihr absoluter Pol zugeordnet, die Reciprocität ist von den Punkten $ABCDE$ unabhängig. Sind nun α_1, α_2, α_3 die homologen Punkte zu den Ebenen $BC\gamma$, $CA\gamma$, $AB\gamma$, also $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ die homologe Ebene zu γ, so stehen die Ebenen $BC\gamma$, $CA\gamma$, $AB\gamma$ senkrecht auf ABC, mithin liegen α_1, α_2, α_3 in der Ebene ABC, dem Punkte γ ist die Ebene ABC zugeordnet, ebenso dem Punkte δ die Ebene ABD, folglich der Geraden ab (d. i. $\gamma\delta$) die Gerade AB, weiter der ac die AC, der Ebene a der Punkt A. Es erweisen sich also aA, bB, cC, dD, eE als Paare der Reciprocität, diese als Polarreciprocität; wir nennen sie die **absolute Polarreciprocität**, die Paare homologer Elemente bilden das **absolute Polarsystem**. Das absolute Polarsystem der Nichteuklidischen Geometrie ist kein Nullsystem.

Sowohl in der Euklidischen als auch in der Nichteuklidischen Geometrie bestimmt man mit Hülfe des absoluten Polarsystemes zu jedem eigentlichen Punkte die absolute Polarebene, zu jeder eigentlichen Geraden die absolute Polargerade, zu jeder eigentlichen Ebene den absoluten Pol. **Beim Uebergange von einer Figur zu einer congruenten entspricht das absolute Polarsystem sich selbst.** Wieweit durch diese Eigenschaft die Beziehung bestimmt wird, soll hier nicht untersucht werden. Es mag jedoch zum Schluss noch eine Betrachtung Platz finden, für welche der Satz 13. des vorigen Paragraphen vorbereitet wurde.

Sind drei eigentliche Punkte ABC gegeben, nicht in gerader Linie, so wird nach dem soeben angeführten Satze bei geeigneter Vertheilung der Buchstaben die aus A nach BC gefällte Senkrechte die BC in a zwischen B und C treffen; der entgegengesetzte Schenkel zu Aa sei Aa'. Man errichte nun in der Ebene ABC im Punkte A die Senkrechte auf Aa und

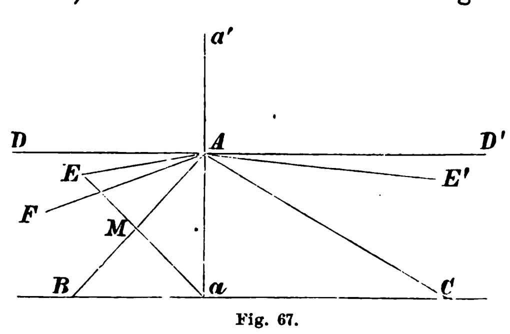


Fig. 67.

nenne AD den Schenkel der Senkrechten, welcher mit B auf einerlei Seite der Aa liegt, AD' den entgegengesetzten, also auf einerlei Seite mit C verlaufenden Schenkel; der Schnittpunkt d von BC und DD' ist mit a verknüpft. Es sei M die Mitte der Strecke AB; auf aM mache man die Strecke ME der Strecke Ma congruent, so dass B und E auf einer Seite der Aa liegen. Wird dann in der Ebene ABC diejenige Drehung um M vollzogen, bei welcher A in B, also E in a, die Gerade AE in BC übergeht, so bleiben alle mit M verknüpften Punkte der Ebene fest, demnach treffen sich AE und BC in dem mit M verknüpften Punkte e. Der Punkt E ist in der Ebene ABC dadurch definirt, dass ABa und BAE congruent sind und C, E auf verschiedenen Seiten der AB liegen. Ebenso ist in der Ebene ABC ein Punkt E' dadurch definirt, dass ACa und CAE' congruent sind und B, E' auf verschiedenen Seiten der AC liegen; E' und C befinden sich auf einer Seite der Aa.

In der Euklidischen Geometrie fallen d und e zusammen, also auch die Schenkel AD und AE, AD' und AE'. „Die Summe der Winkel des Dreiecks ist ein gestreckter Winkel."

Für den Fall der Nichteuklidischen Geometrie heisse f in BC, b in AB der jedesmal mit B verknüpfte Punkt, und AF der mit B auf einer Seite der Aa gelegene Schenkel der Af. Die Punkte AB werden durch Mb getrennt; dies überträgt sich auf die absoluten Polaren und auf deren Durchschnittspunkte mit der BC, d. h. es werden df durch eB getrennt, folglich AD, AF durch AE, AB. Da der Schenkel AB nicht zwischen den Schenkeln AD und AF liegt, so muss der Schenkel AE zwischen den Schenkeln AD und AF liegen.

In der Nichteuklidischen Geometrie wird (§ 16 Seite 131) auf irgend einer eigentlichen Geraden entweder kein Paar der absoluten Involution durch ein anderes oder jedes Paar durch jedes andere getrennt, und zwar verhalten sich in dieser Hinsicht alle eigentlichen Geraden gleich. Die erstere Annahme führt zur Gaussschen, die letztere zur Riemann'schen Geometrie*).

In der Gauss'schen Geometrie liegen auf der Geraden BC die Punkte ad und Bf nicht getrennt, folglich werden die Strahlen Aa, AD durch AB, AF nicht getrennt. Der Schenkel AB liegt zwischen den Schenkeln Aa und AD, folglich auch der Schenkel

*) Vgl. Baltzer, Die Elemente der Mathematik II. Planimetrie § 2. — Die drei Arten der Geometrie sind von Herrn F. Klein parabolische, hyperbolische und elliptische genannt worden, Mathem. Ann. Bd. 4 S. 577.

11*

AF und endlich der Schenkel AE; ebenso liegt der Schenkel AE' zwischen den Schenkeln Aa und AD'. „Die Summe der Winkel des Dreiecks ist kleiner als ein gestreckter."

In der Riemann'schen Geometrie liegen auf der Geraden BC die Punkte ad und Bf getrennt, folglich der Schenkel AF nicht zwischen den Schenkeln Aa und AD, sondern zwischen den Schenkeln AD und Aa', ebenso der Schenkel AE; zugleich wird der Schenkel AE' zwischen die Schenkel Aa' und AD' fallen. „Die Summe der Winkel des Dreiecks ist grösser als ein gestreckter*)."

§ 21. Doppelverhältnisse.

Unter den Begriffen, welche zur Beschreibung der Erscheinungen dienen, bilden die mathematischen Begriffe eine selbstständige Gruppe. Sie lassen sich mit einander durch eine Reihe von Beziehungen verknüpfen, ohne dass man andere Begriffe hinzuzunehmen braucht.

In derselben Weise lässt sich innerhalb der Mathematik die Gruppe derjenigen Begriffe loslösen, mit welchen sich die Zahlenlehre (Arithmetik, Algebra, Analysis) befasst. Die Geometrie nimmt andere, ihr eigenthümliche Begriffe hinzu; diese machen jedoch keine selbstständige Gruppe aus, indem sie nicht unter sich allein, sondern unter Zuziehung der Zahlenbegriffe, in Verbindung gesetzt werden, wodurch die Anwendung der Zahlenlehre auf die Geometrie bedingt wird.

Die Zahl wird in der Geometrie am häufigsten bei der Messung gebraucht. Alle Messungen sind auf den einfachsten Fall zurückzuführen, wo man eine Figur, z. B. eine gerade Strecke, aus mehreren congruenten zusammensetzt und die letzteren zählt. Die Aneinanderreihung von congruenten Strecken auf einer Geraden ist eine Construction, durch welche man, auf Grundsatz IV in § 13 gestützt, Zahlen für die Punkte der Geraden einführen kann. Aber die in § 15 eingeführten Begriffe des Netzes und der äquivalenten Paare bieten uns ein anderes Mittel zur Einführung von Zahlen zunächst für die Elemente einförmiger Gebilde dar, indem eine gewisse projective Construction wiederholt ausgeführt und die Anzahl der Constructionen gezählt wird.

Es seien $u a_0 a_1$ beliebige Elemente eines einförmigen Gebildes. Macht man die Paare $a_0 a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ... für das Grenzelement u äquivalent, so entsteht ein Netz. Diesen Begriff wollen wir zu-

---

*) S. noch § 23. Schluss.

nächst dadurch erweitern, dass wir die Paare $a_1 a_0$, $a_0 b_1$, $b_1 b_2, \ldots$ ebenfalls für das Grenzelement u äquivalent machen. Die so hinzutretenden, von einander und von $u a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$ verschiedenen Elemente b_1, $b_2, \ldots$ mögen auch mit

$$a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots$$

bezeichnet und $(-1)^{\text{tes}}$, $(-2)^{\text{tes}}, \ldots$ Element des Netzes $u a_0 a_1$

a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 u

genannt werden. *Wenn jetzt λ und μ beliebige ganze Zahlen vorstellen, so sind die Paare $a_\lambda a_{\lambda+1}$ und $a_\mu a_{\mu+1}$ für u äquivalent; das Gebilde $a_{\lambda-1}\, a_{\lambda+1}\, a_\lambda u$ ist harmonisch; zu drei Elementen $u a_0 a_\lambda$ lässt sich a_1 eindeutig so bestimmen, dass a_λ das λ^{te} Element des Netzes $u a_0 a_1$ wird.* — Nimmt man in demselben Gebilde das Element p beliebig, von u verschieden, so kann man die ganze Zahl n derart angeben, dass das n^{te} Element des Netzes entweder mit p zusammenfällt oder vom $(n+1)^{\text{ten}}$ durch p und u getrennt wird. Denn wenn p von a_0, a_1, b_1 verschieden ist, so werden entweder $a_0 a_1$ durch pu oder $a_0 p$ durch $a_1 u$ oder $a_1 p$ durch $a_0 u$ getrennt; im ersten Falle ist $n = 0$, der zweite ist in § 15 (Seite 120) erledigt; im dritten Falle werden, da $a_1 b_1$ und $a_0 u$ getrennt liegen, $b_1 p$ nicht durch $a_0 u$ getrennt, sondern entweder $a_0 b_1$ durch pu — und dann ist $n = -1$ zu nehmen — oder $a_0 p$ durch $b_1 u$, so dass man den citirten Satz aus § 15 auf das Netz $u a_0 b_1$ anwenden kann.

In der Euklidischen Geometrie ist der Fall von besonderem Interesse, wo a_0 und a_1 eigentliche Punkte sind und u in den absoluten Punkt der Geraden $a_0 a_1$ gelegt wird. Die Aequivalenz mit dem Grenzpunkte u und den einander zugeordneten Punkten $a_0 a_1$ ist dort nach § 19 (Seite 146) eine directe Congruenz auf der Geraden $a_0 a_1$, die Paare $a_\lambda a_{\lambda+1}$ und $a_\mu a_{\mu+1}$ sind also direct congruent. Der absolute Betrag der Zahl λ giebt an, in wie viele mit $a_0 a_1$ direct congruente Strecken sich bei positivem λ die Strecke von a_0 bis a_λ, bei negativem λ die Strecke von a_λ bis a_0 zerlegen lässt. Die Zahl λ wird deshalb das Verhältniss der beiden Strecken $a_0 a_\lambda$ und $a_0 a_1$, und weiter die Zahl $\frac{\lambda}{\mu}$ das Verhältniss der Strecken $a_0 a_\lambda$ und $a_0 a_\mu$ genannt, wobei jede Strecke durch eine direct congruente ersetzt werden kann.

Ist aber p das λ^{te} Element des beliebigen Netzes $u a_0 a_1$, so w[illegible] [illegible]rch $u a_0 a_1 p$ vollkommen bestimmte ganze Zahl [illegible]mentes p im Netze $u a_0 a_1$ oder auch den

Index der Paare $a_0 p$, $a_0 a_1$ **für das Grenzelement** u **nennen** und schreiben:

$$\overset{u a_0 a_1}{\mathrm{ind}}\, p = \overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} a_0 p \\ a_0 a_1 \end{pmatrix} = \lambda,$$

so dass

$$\overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \end{pmatrix} = 0, \quad \overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} a_0 a_1 \\ a_0 a_1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dabei kann das Paar $a_0 a_1$ das **Einheitspaar** genannt werden. Versteht man unter $\alpha\beta$ ein mit dem Einheitspaare für u äquivalentes Paar in demselben Gebilde (α, β von einander und von u verschieden), so lässt sich das Element a_1 und mithin überhaupt das Einheitspaar durch die Elemente $\alpha\beta a_0$ eindeutig bestimmen. In Rücksicht hierauf wollen wir die Zahl λ auch den Index der Paare $a_0 p$, $\alpha\beta$ für das Grenzelement u, in Zeichen

$$\lambda = \overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} a_0 p \\ \alpha\beta \end{pmatrix},$$

und $\alpha\beta$ ein Einheitspaar nennen. Jedes mit $\alpha\beta$ für u äquivalente Paar ist ein Einheitspaar. Bei einem von Null verschiedenen Index sind alle Einheitspaare für u äquivalent.

Im gegenwärtigen Paragraphen werden nur Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes in Betracht gezogen. Die Gleichung

$$\overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} pq \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = 0$$

bedeutet alsdann, dass p und q zusammenfallen. Die Gleichung

$$\overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} pq \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = 1$$

bedeutet, dass die Paare pq und $\alpha\beta$ für u äquivalent sind. Endlich wird durch die Gleichung

$$\overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = -1$$

die harmonische Lage der Elemente $\alpha\beta\gamma\alpha u$ dargestellt. Dabei sind allemal $\alpha\beta\gamma pq$ von u, α von β verschieden.

Sind drei verschiedene Elemente pqu gegeben, so kann man ein Einheitspaar $\alpha\beta$ derart bestimmen, dass der Index der Paare pq, $\alpha\beta$ für u einer beliebigen ganzen, von Null verschiedenen Zahl λ gleich wird. Man kann nämlich r so bestimmen, dass q das λ^{te} Element des Netzes upr wird, und braucht dann nur $\alpha\beta$ für u mit pr äquivalent zu machen.

Sind die Paare pq, $p'q'$ für das Grenzelement u äquivalent und

$$\lambda = \overset{u}{\mathrm{ind}} \begin{pmatrix} pq \\ \alpha\beta \end{pmatrix},$$

so ist auch

$$\lambda = \overset{u}{\text{ind}} \binom{p'q'}{\alpha\beta}.$$

Denn macht man die Paare pr und $p'r'$ für u mit $\alpha\beta$ (also auch unter sich) äquivalent, so wird zunächst

$$\lambda = \overset{u}{\text{ind}} \binom{pq}{pr}.$$

Diese Gleichung stellt eine projective Eigenschaft der Figur $upqr$ dar und muss daher auch für jede projective Figur bestehen. Nun werden aber pp', qq', rr' Paare homologer Elemente einer Aequivalenz mit dem Grenzelement u (§ 16 Seite 132), folglich die Gebilde $upqr$ und $up'q'r'$ projectiv; mithin ist

$$\lambda = \overset{u}{\text{ind}} \binom{p'q'}{p'r'} = \overset{u}{\text{ind}} \binom{p'q'}{\alpha\beta}.$$

Umgekehrt: *Wenn die Paare pq und $p'q'$, auf ein gewisses Einheitspaar bezogen, einen und denselben Index für u ergeben, so sind die Paare pq und $p'q'$ für u äquivalent.* Dann macht man das Paar pr mit dem Einheitspaare, das Paar ps mit $p'q'$ für u äquivalent, so kommt:

$$\overset{u}{\text{ind}} \binom{pq}{pr} = \overset{u}{\text{ind}} \binom{p'q'}{p\,r} = \overset{u}{\text{ind}} \binom{ps}{pr},$$

d. h. die Elemente q und s haben im Netze upr gleichen Index, sie können also nicht von einander verschieden sein.

Man darf hiernach im Index der beiden Paare pq und $\alpha\beta$ für u nicht bloss $\alpha\beta$, sondern auch pq mit jedem für u äquivalenten Paare vertauschen, aber mit keinem andern. Vertauscht man also $\alpha\beta$ mit $\beta\alpha$ oder pq mit qp, so wird der Index, wenn er nicht Null ist, eine Aenderung erleiden. Es sei etwa

$$\overset{u}{\text{ind}} \binom{p\,q}{\alpha\beta} = \lambda$$

positiv. Macht man alsdann die Paare $a_1 a_0$, $a_0 b_1$, $b_1 b_2$, ..., $b_{\lambda+1} b_\lambda$ mit $\alpha\beta$ für u äquivalent, so dass

$$\lambda = \overset{u}{\text{ind}} \binom{a_0 b_\lambda}{a_0 b_1} = \overset{u}{\text{ind}} \binom{a_0 b_\lambda}{\alpha\beta},$$

also $a_0 b_\lambda$ mit pq für u äquivalent wird, überdies $b_\lambda b_{\lambda-1}$, $b_{\lambda-1} b_{\lambda-2}$, ..., $b_1 a_0$, $a_0 a_1$ mit $\beta\alpha$, $b_\lambda a_0$ mit qp, so ist b_λ der $(-\lambda)^{\text{te}}$ Punkt des Netzes $ua_0 a_1$, a_0 der λ^{te} Punkt des Netzes $ub_\lambda b_{\lambda-1}$, d. h.

$$\overset{u}{\text{ind}} \binom{a_0 b_\lambda}{a_0 a_1} = -\lambda, \quad \overset{u}{\text{ind}} \binom{b_\lambda a_0}{b_\lambda b_{\lambda-1}} = \lambda,$$

oder

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\beta\,\alpha} = -\lambda, \quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\beta\,\alpha} = \lambda$$

und folglich

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\alpha\,\beta} = -\overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\beta\,\alpha} = -\lambda.$$

Dieselben Beziehungen erhält man, wenn man

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} = \lambda = -\mu$$

negativ voraussetzt. Wenn also die Paare pq, $\alpha\beta$ für u einen Index besitzen, so ist

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} = -\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\beta\,\alpha},$$

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta} = -\overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\alpha\,\beta}.$$

Die hieraus sich ergebende Gleichung

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,p}{\alpha\,\beta} = 0$$

lässt sich unter Hinzunahme eines Elementes r zur folgenden

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,r}{\alpha\,\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,p}{\alpha\,\beta} = 0$$

erweitern, sofern solche Indices überhaupt existiren. Um die neue Gleichung zu beweisen, beachte man zunächst, dass sie sich nicht ändert, wenn man die Elemente pqr cyklisch permutirt oder p mit q (pqr mit qpr) vertauscht, also überhaupt, wenn man pqr beliebig permutirt. Da nun mindestens zwei von den drei Addenden einerlei Zeichen haben, so kann ich durch geeignete Vertheilung der Buchstaben bewirken, dass die beiden ersten Addenden

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\,\beta} = m, \quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,r}{\alpha\,\beta} = n$$

ein und dasselbe Zeichen und zwar das positive besitzen, und brauche die Gleichung nur unter dieser Voraussetzung zu beweisen. Zu dem Zwecke mache man die Paare $a_0 a_1$, $a_1 a_2$, ..., $a_{m-1} a_m$, $a_m a_{m+1}$, ..., $a_{m+n-1} a_{m+n}$ für u mit $\alpha\beta$ äquivalent; es wird dann $a_0 a_m$ mit pq, $a_m a_{m+n}$ mit qr, folglich (nach § 15 Seite 122 f.) $a_0 a_{m+n}$ mit pr äquivalent, d. h.

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r}{\alpha\,\beta} = m + n, \quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,p}{\alpha\,\beta} = -m - n.$$

Bei jeder Anordnung der von u verschiedenen Elemente $p\ q\ r\ s\ r_1\ r_2 \ldots r_{n-1}$ haben wir jetzt:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r}{\alpha\,\beta} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r}{\alpha\,\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,q}{\alpha\,\beta}$$

und ebenso:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,p}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,s}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{s\,p}{\alpha\beta},\quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,q}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,s}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{s\,q}{\alpha\beta},$$

folglich auch:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{q\,r}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,s}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{s\,p}{\alpha\beta}=0$$

oder

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,s}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{s\,q}{\alpha\beta},$$

überhaupt

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r_1}{\alpha\beta}+\overset{u}{\text{ind}}\binom{r_1 r_2}{\alpha\,\beta}+\cdots+\overset{u}{\text{ind}}\binom{r_{n-1}q}{\alpha\quad\beta},$$

immer unter der Voraussetzung, dass die betreffenden Indices wirklich existiren. Es ist übrigens in dieser Hinsicht leicht einzusehen, dass durch das Vorhandensein von

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r}{\alpha\beta}\quad\text{und}\quad\overset{u}{\text{ind}}\binom{r\,q}{\alpha\beta}$$

allemal das Vorhandensein eines Index der Paare pq, $\alpha\beta$ für u bedingt wird, folglich auch durch die Existenz von

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r_1}{\alpha\beta},\ \overset{u}{\text{ind}}\binom{r_1 r_2}{\alpha\,\beta},\ \ldots,\ \overset{u}{\text{ind}}\binom{r_{n-1}q}{\alpha\quad\beta}.$$

Sind die n Paare pr_1, r_1r_2, ..., $r_{n-1}q$ für u äquivalent, p von r_1 verschieden, so erhält man:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}=n\ \overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r_1}{\alpha\beta},\quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{p\,r_1}=n,\quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{r_1 p}=-n,$$

folglich:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{p\,r_1}\cdot\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,r_1}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{r_1 p}\cdot\overset{u}{\text{ind}}\binom{r_1 p}{\alpha\,\beta}.$$

So oft daher Indices der Paare pq, ab und ab, $\alpha\beta$ für u existiren, besteht die Gleichung

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{a\,b}\cdot\overset{u}{\text{ind}}\binom{a\,b}{\alpha\beta}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}.$$

Wenn überhaupt Indices der Paare pq, ab und pq, $\alpha\beta$ für u existiren, ohne dass p und q zusammenfallen, so bestimmen alle drei Paare mit einem geeigneten Einheitspaare Indices für u; denn bei geeigneter Wahl der Elemente $a'b'\alpha'\beta'$ ist

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{a\,b}{a'b'}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta},\quad \overset{u}{\text{ind}}\binom{\alpha\,\beta}{\alpha'\beta'}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{a\,b},$$

folglich

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{a'b'}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{a\,b}\cdot\overset{u}{\text{ind}}\binom{a\,b}{a'b'}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha\beta}\cdot\overset{u}{\text{ind}}\binom{\alpha\,\beta}{\alpha'\beta'}=\overset{u}{\text{ind}}\binom{p\,q}{\alpha'\beta'},$$

mithin $a'b'$ mit $\alpha'\beta'$ für u äquivalent, $a'b'$ ein Paar der verlangten Art. Wenn ausserdem Indices der Paare rs, ab und rs, $\alpha\beta$ für u existiren, so hat man bei unveränderter Bedeutung von $a'b'$:

$$\overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ ab \end{pmatrix} . \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} ab \\ a'b' \end{pmatrix} = \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ a'b' \end{pmatrix} = \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ \alpha\beta \end{pmatrix} . \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ a'b' \end{pmatrix}$$

oder

$$\overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} pq \\ ab \end{pmatrix} . \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ ab \end{pmatrix} . \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} pq \\ \alpha\beta \end{pmatrix},$$

d. h. bei Vertauschung von ab mit $\alpha\beta$ bleibt das Verhältniss

$$\overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ ab \end{pmatrix} : \overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} pq \\ ab \end{pmatrix}$$

ungeändert und ist mithin durch $rspqu$ allein bestimmt. Indem wir jetzt dieses Verhältniss den Index der Paare rs, pq für das Grenzelement u nennen und mit

$$\overset{u}{\text{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ pq \end{pmatrix}$$

bezeichnen, erhalten wir als Indices alle endlichen rationalen Zahlen, ohne mit den bisherigen Festsetzungen in Widerspruch zu gerathen. Ist in der That der Zähler $= mn$, der Nenner $= m$, wo m und n ganze Zahlen sind, m nicht Null, so ist auch im früheren Sinne n der Index der Paare rs, pq für u.

Auf den erweiterten Begriff des Index lassen sich die oben aufgestellten Sätze leicht übertragen. Bei den Beweisen wird der Umstand benutzt, dass, wenn die Paare cd, $\alpha_1\beta_1$ und die Paare cd, $\alpha_2\beta_2$ Indices für u bestimmen, bei geeigneter Wahl der Elemente $\alpha'\beta'$ Indices von $\alpha_1\beta_1$, $\alpha'\beta'$ und von $\alpha_2\beta_2$, $\alpha'\beta'$ existiren.

Besitzen die Paare pq, $\alpha\beta$ einen Index für u, und sind $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ für u äquivalent, so haben die Paare pq, $\alpha'\beta'$ denselben Index. Besitzen die Paare pq und $\alpha\beta$ denselben, von Null verschiedenen Index, wie die Paare pq und $\alpha'\beta'$, so sind $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ äquivalent.

Sind drei verschiedene Elemente pqu gegeben, so kann man $\alpha\beta$ derart bestimmen, dass der Index der Paare pq, $\alpha\beta$ oder auch der Index der Paare $\alpha\beta$, pq für u einer beliebigen rationalen, endlichen und von Null verschiedenen Zahl gleich wird.

Besitzen die Paare pq, $\alpha\beta$ einen Index für u, und sind pq, $p'q'$ für u äquivalent, so besitzen die Paare $p'q'$, $\alpha\beta$ denselben Index. Haben die Paare pq und $\alpha\beta$ denselben Index, wie die Paare $p'q'$ und $\alpha\beta$, so sind pq und $p'q'$ äquivalent.

Besitzen die Paare pq und $\alpha\beta$ einen Index für u, so ist

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{\beta\alpha} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{qp}{\alpha\beta} = -\overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{\alpha\beta}.$$

Daran schliessen sich die Gleichungen:

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{\alpha\beta} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{pr}{\alpha\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{rq}{\alpha\beta},$$

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{\alpha\beta} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{pr_1}{\alpha\beta} + \overset{u}{\text{ind}}\binom{r_1r_2}{\alpha\beta} + \cdots + \overset{u}{\text{ind}}\binom{r_{n-1}q}{\alpha\beta},$$

welche das Vorhandensein der rechts stehenden Indices zur Voraussetzung haben.

Sind Indices von rs, pq *und von* pq, ab *für* u *vorhanden, so ist*

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{rs}{pq} \cdot \overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{ab} = \overset{u}{\text{ind}}\binom{rs}{ab}.$$

Sind p, q *verschieden und Indices von* rs, ab *und von* pq, ab *für* u *vorhanden, so ist das Verhältniss*

$$\overset{u}{\text{ind}}\binom{rs}{ab} : \overset{u}{\text{ind}}\binom{pq}{ab}$$

von ab *unabhängig und gleich dem Index der Paare* rs, pq *für* u. —

Wenn die Paare bp, bc einen Index für a besitzen, so wollen wir denselben auch den Index des Elementes p im Netze abc nennen und schreiben:

$$\overset{a}{\text{ind}}\binom{bp}{bc} = \overset{abc}{\text{ind}}\, p.$$

Bei Festhaltung von a, b, c durchläuft dieser Index alle endlichen rationalen Werthe*), nimmt aber jeden Werth nur einmal an. Er bleibt ungeändert, wenn man die Figur $abcp$ durch irgend eine projective Figur $a'b'c'p'$ aus demselben oder aus einem andern einförmigen Gebilde ersetzt. Nun sind, so lange $abcp$ vier verschiedene Elemente vorstellen, die Figuren $abcp$, $pcba$, $cpab$, $bapc$ projectiv (§ 16 Seite 128); folglich ist alsdann

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, p = \overset{pcb}{\text{ind}}\, a = \overset{cpa}{\text{ind}}\, b = \overset{bap}{\text{ind}}\, c.$$

Nur bei harmonischer Lage können die vier Elemente noch auf andere Arten permutirt werden, ohne dass der Index sich ändert; *die harmonische Lage wird jetzt durch die Gleichung*

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, p = -1$$

ausgedrückt.

Aus der Formel

$$\overset{a}{\text{ind}}\binom{rp}{bc} = \overset{a}{\text{ind}}\binom{rb}{bc} + \overset{a}{\text{ind}}\binom{bp}{bc} = \overset{a}{\text{ind}}\binom{bp}{bc} - \overset{a}{\text{ind}}\binom{br}{bc},$$

---

*) Mit der Einschränkung, welche in § 23 zur Sprache kommt.

welche die Existenz von Indices der Elemente p und r im Netze voraussetzt, folgt:

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, p - \overset{abc}{\text{ind}}\, r = \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} r\,p \\ b\,c \end{pmatrix}.$$

Wird diese Voraussetzung noch auf ein Element q ausgedehnt, so hat man:

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, q - \overset{abc}{\text{ind}}\, r = \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} r\,q \\ b\,c \end{pmatrix}$$

und daraus, falls pqr von einander verschieden sind:

$$\frac{\overset{abc}{\text{ind}}\, p - \overset{abc}{\text{ind}}\, r}{\overset{abc}{\text{ind}}\, q - \overset{abc}{\text{ind}}\, r} = \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} r\,p \\ r\,q \end{pmatrix} = \overset{arq}{\text{ind}}\, p = \overset{pqr}{\text{ind}}\, a = \overset{p}{\text{ind}} \begin{pmatrix} q\,a \\ q\,r \end{pmatrix}.$$

Tritt endlich ein von p verschiedenes Element s hinzu, welches im Netze abc einen Index besitzt, so hat man noch:

$$\frac{\overset{abc}{\text{ind}}\, q - \overset{abc}{\text{ind}}\, s}{\overset{abc}{\text{ind}}\, p - \overset{abc}{\text{ind}}\, s} = \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} s\,q \\ s\,p \end{pmatrix} = \overset{asp}{\text{ind}}\, q = \overset{pqa}{\text{ind}}\, s = \overset{p}{\text{ind}} \begin{pmatrix} q\,s \\ q\,a \end{pmatrix}$$

und gelangt also, da das Product

$$\overset{p}{\text{ind}} \begin{pmatrix} q\,s \\ q\,a \end{pmatrix} . \overset{p}{\text{ind}} \begin{pmatrix} q\,a \\ q\,r \end{pmatrix} = \overset{p}{\text{ind}} \begin{pmatrix} q\,s \\ q\,r \end{pmatrix}$$

sich als Index von s im Netze pqr erweist, zu der wichtigen Formel:

$$\overset{pqr}{\text{ind}}\, s = \frac{\overset{abc}{\text{ind}}\, p - \overset{abc}{\text{ind}}\, r}{\overset{abc}{\text{ind}}\, q - \overset{abc}{\text{ind}}\, r} \, \frac{\overset{abc}{\text{ind}}\, q - \overset{abc}{\text{ind}}\, s}{\overset{abc}{\text{ind}}\, p - \overset{abc}{\text{ind}}\, s}.$$

Wir können auch schreiben:

$$\overset{pqr}{\text{ind}}\, s = \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} r\,p \\ r\,q \end{pmatrix} . \overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} s\,q \\ s\,p \end{pmatrix} = \frac{\overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} p\,r \\ r\,q \end{pmatrix}}{\overset{a}{\text{ind}} \begin{pmatrix} p\,s \\ s\,q \end{pmatrix}}.$$

In der Euklidischen Geometrie wird, wenn $pqrs$ eigentliche Punkte sind und a in den absoluten Punkt ihrer Geraden gelegt wird, im Anschluss an die auf Seite 165 gemachte Bemerkung, der Zähler des vorstehenden Bruches, also das Verhältniss der Strecken pr und rq, das Theilungsverhältniss der Strecke pq im Punkte r und der Nenner entsprechend das Theilungsverhältniss der Strecke pq im Punkte s genannt. Die Zahl, welche wir als den Index von s im Netze pqr eingeführt haben, erscheint hier als Verhältniss zweier Verhältnisse. Daher kommt es, dass ihr der Name Doppelverhältniss beigelegt worden ist.

Ist d irgend ein Element, welches in dem beliebigen Netze

abc einen Index besitzt, so heisst dieser Index das Doppelverhältniss der vier Elemente $abcd$ oder der beiden Paare ab und cd und wird zur Abkürzung mit $(abcd)$ bezeichnet:

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, d = (abcd).$$

Ziehen wir einstweilen nur Doppelverhältnisse von je vier verschiedenen Elementen in Betracht, welche also ausser $0, 1, \infty$ alle rationalen Werthe annehmen können. Wenn man alsdann zwei Elemente vertauscht, zugleich aber auch die beiden andern, so entsteht eine mit der ursprünglichen projective Figur; also ist $(abcd) = (cdab) = (badc)$, d. h. *das Doppelverhältniss zweier Paare bleibt ungeändert, wenn man die Paare vertauscht oder in beiden Paaren die Elemente gleichzeitig umstellt, folglich auch bei der Verbindung dieser Operationen.* Dagegen tritt bei den andern Umstellungen der Elemente im Allgemeinen eine Aenderung des Doppelverhältnisses ein. *Vertauscht man die Elemente eines Paares, so geht das Doppelverhältniss in den reciproken Werth über;* denn wenn die Paare bd und bc einen Index für a besitzen, so ist sein reciproker Werth der Index der Paare bc und bd. *Nach Vertauschung der inneren oder äusseren Elemente erhält man den Werth des Doppelverhältnisses, indem man den ursprünglichen Werth von Eins abzieht;* denn es ist

$$1 - \overset{a}{\text{ind}}\begin{pmatrix} bd \\ bc \end{pmatrix} = \overset{a}{\text{ind}}\begin{pmatrix} cb \\ cb \end{pmatrix} + \overset{a}{\text{ind}}\begin{pmatrix} bd \\ cb \end{pmatrix} = \overset{a}{\text{ind}}\begin{pmatrix} cd \\ cb \end{pmatrix} = (acbd) = (dbca).$$

Wenn also vier Elemente bei irgend einer Anordnung ein Doppelverhältniss ergeben, etwa $(abcd) = x$, so entspricht jeder Anordnung ein Doppelverhältniss, und zwar ist

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba) = x,$$
$$(abdc) = (bacd) = (dcab) = (cdba) = \frac{1}{x},$$
$$(acbd) = (cadb) = (bdac) = (dbca) = 1 - x,$$
$$(adbc) = (dacb) = (bcad) = (cbda) = 1 - \frac{1}{x},$$
$$(acdb) = (cabd) = (dbac) = (bdca) = \frac{1}{1-x},$$
$$(adcb) = (dabc) = (cbad) = (bcda) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Diese sechs Zahlen sind von einander verschieden, ausser wenn x einen der Werthe $-1, 2, \frac{1}{2}$ besitzt; im letzteren Falle sind acht Anordnungen harmonisch und haben das Doppelverhältniss -1, während acht andere das Doppelverhältniss 2, die acht übrigen $\frac{1}{2}$ liefern. —

Man bemerke noch: *Wenn Doppelverhältnisse* (abp_1p_2), (abp_1p_3) *existiren, so geben auch* abp_2p_3 *ein Doppelverhältniss, und zwar ist*

$$(abp_2p_3)\,(abp_3p_1)\,(abp_1p_2) = 1.$$

Wenn Doppelverhältnisse

$$(abcp_1) = x_1,\; (abcp_2) = x_2,\; (abcp_3) = x_3,\; (abcp_4) = x_4$$

existiren, so geben auch $p_1p_2p_3p_4$ *ein Doppelverhältniss*

$$(p_1p_2p_3p_4) = \frac{(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_4)}.$$

An dem Vorzeichen des Doppelverhältnisses $(abcd)$ erkennt man, ob die Paare ab und cd getrennt liegen oder nicht. Ist das Doppelverhältniss $(abcd)$ positiv, so werden ab nicht durch cd getrennt; ist es negativ, so werden ab durch cd getrennt. Es seien nämlich m und n positive ganze Zahlen, und bei gegebenen a, b, c seien die Elemente e, d, d' so construirt, dass

$$(abce) = \frac{1}{n},\quad (abcd) = \frac{m}{n},\quad (abcd') = -\frac{m}{n};$$

da $(abec) = n$, $(abed) = (abec)\,(abcd) = m$ wird, so ist c das n^{te}, d das m^{te} Element des Netzes abe, folglich (§ 15 Seite 119) ae durch bc und durch bd getrennt, mithin ab weder durch ce noch durch de, schliesslich ab nicht durch cd; da

$$(abdd') = (abdc)\,(abcd') = -1,$$

so werden ab durch dd' getrennt, aber nicht durch dc, folglich werden ab durch cd' getrennt.

Aus drei verschiedenen Elementen abc können wir die Doppelverhältnisse $(abcb) = 0$ und $(abcc) = 1$ bilden. Es empfiehlt sich aber, Doppelverhältnisse zuzulassen, in denen irgend zwei Elemente identisch sind. Um die soeben abgeleiteten Sätze (wenn auch zum Theil mit Modificationen) aufrecht zu erhalten, hat man

$$(acbc) = (cacb) = 0,\; (abcc) = (ccab) = 1,\; (cabc) = (accb) = \infty$$

und dem entsprechend

$$\overset{abc}{\text{ind}}\, a = (abca) = \infty$$

anzunehmen; die zwölf Permutationen der Elemente $abcc$ geben die je viermal auftretenden Doppelverhältnisse $0,\ 1,\ \infty$.

Jetzt gehört zu jeder rationalen Zahl λ, mit Einschluss der Zahl ∞, ein und nur ein Element p, welches mit abc ein Doppelverhältniss $(abcp) = \lambda$ bildet und allemal ein Element des Netzes abc heissen soll. Je vier von einander und von a verschiedene Elemente $p_1p_2p_3p_4$ des Netzes abc liefern ein Doppelverhältniss, welches nach der auf Seite 172 gegebenen Formel aus ihren Indices berechnet wird. Aber auch wenn ein Element nach a gelegt wird,

ergiebt sich ein Doppelverhältniss; denn nach einer auf Seite 172 gegebenen Formel ist

$$(p_1 p_2 p_3 a) = \frac{(abcp_1) - (abcp_3)}{(abcp_2) - (abcp_3)}.$$

Bezeichnet man also mit $p_1 p_2 p_3$ irgend welche Elemente des Netzes abc, so ist jedes Element des Netzes abc ein Element des Netzes $p_1 p_2 p_3$ und umgekehrt.

Sind die Elemente e und f von a verschieden, so giebt es Elemente des Netzes abc, welche durch e und f von a getrennt werden. Beweis: Sind e und f Elemente des Netzes abc, so suche man ein Element u, welches im Netze efa einen negativen Index hat; u ist auch ein Element des Netzes abc, und ef werden durch au getrennt. Ist e ein Element des Netzes abc, f aber nicht, so ist wenigstens eines der Elemente b und c von e verschieden, etwa b; der Fall, wo ef durch ab getrennt werden, bedarf keiner weiteren Erörterung; werden aber eb durch af getrennt, so bestimmt man nach § 15 Seite 120 ein Element u des Netzes eab (also auch des Netzes abc) derart, dass au durch ef getrennt werden; liegen endlich ae durch bf getrennt (also be nicht durch af), so bestimmt man ein Element t des Netzes abe derart, dass bt durch af getrennt werden (also et durch af), und hierauf ein Element u des Netzes eat derart, dass au durch ef getrennt werden. Es bleibt noch die Annahme übrig, dass weder e noch f zum Netze abc gehören. Man mache $b\varphi$ mit ef für a äquivalent, suche im Netze abc ein Element β, welches von a durch b und φ getrennt wird, und nach Seite 165 im Netze $ab\beta$ zwei Elemente γ und u derart, dass die Paare γu, ae getrennt liegen und die Paare $b\beta$, γu für a äquivalent sind; endlich mache man γg und $b\varphi$ für a äquivalent. Es werden $b\gamma$, βu, φg Paare von homologen Elementen einer Aequivalenz mit dem Grenzelement a, folglich $ab\beta\varphi$ und $a\gamma ug$ projectiv, γg durch au getrennt, d. h. für a liegt u zwischen γ und g, e zwischen γ und u, folglich e zwischen γ und g, u zwischen e und g; ferner werden (§ 15 Seite 122) $aef\gamma g$ und $ag\gamma fe$ projectiv, für a liegt e zwischen g und γ, folglich g zwischen e und f, also auch u zwischen e und f. Das Element u gehört zum Netze abc und wird von a durch e und f getrennt.

Werden die Elemente efh beliebig angenommen, so giebt es Elemente des Netzes abc, welche durch e und f von h getrennt werden. Denn wenn man unter α ein von h nicht durch e und f getrenntes, unter β und γ zwei von α verschiedene Elemente des Netzes abc, unter u ein von α durch e und f getrenntes Element des Netzes $\alpha\beta\gamma$ versteht, so werden ef durch uh getrennt, und u gehört zum

Netze abc. — *Sind e und f eigentliche Punkte, abc beliebige Punkte der Geraden ef, so giebt es eigentliche Punkte des Netzes abc, welche zwischen e und f liegen.*

Sind efu Elemente des Netzes abc, so liegt der Index von u zwischen den Indices von e und f, wenn ef durch au getrennt werden, und umgekehrt. Denn wenn ef und au getrennt liegen, so ist das Doppelverhältniss

$$(efua) = \frac{(abce) - (abcu)}{(abcf) - (abcu)}$$

negativ, also Zähler und Nenner von verschiedenem Zeichen, u. s. w. — *Sind abc Punkte einer eigentlichen Geraden, efu eigentliche Punkte des Netzes abc, u zwischen e und f gelegen, so liegt der Index von u zwischen den Indices von e und f, wenn a nicht zur Strecke ef gehört,* und umgekehrt.

Das Doppelverhältniss von vier Punkten, welche aus einer Geraden g durch vier Ebenen $ABCD$ herausgeschnitten werden, bezeichnet man durch $g(ABCD)$. Das Doppelverhältniss von vier Strahlen, welche in einer Ebene von einem Punkte p nach vier Punkten $abcd$ gezogen werden, bezeichnet man durch $p(abcd)$. U. s. w.

§ 22. Coordinaten*).

Werden in einem einförmigen Gebilde drei Elemente abe festgehalten, und wird unter p ein beliebiges Element des Netzes abe, unter x der Index von p in dem Netze verstanden, so durchläuft $x = (abep)$ alle rationalen Werthe**), mit Einschluss der Zahl ∞, und es wird durch den Werth von x das Element p im Netze abe ebenso vollständig bestimmt, wie umgekehrt x durch p. Nach dem Sprachgebrauch der analytischen Geometrie können wir daher die Zahl x eine Coordinate des Elementes p nennen. Da

$$(abea) = \infty, \quad (abeb) = 0, \quad (abee) = 1,$$

so haben a, b, e die Coordinaten resp. $\infty, 0, 1$; es wird a das Unendlichkeitselement oder erste Fundamentalelement, b das Nullelement oder zweite Fundamentalelement, e das

*) Vergl. zu diesem Paragraphen: Möbius, der barycentrische Calcul, zweiter Abschnitt, sechstes Capitel; Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage § 29; Lüroth, Mathem. Annalen Bd. 8 S. 207 ff.; Sturm, ebendas. Bd. 9 S. 343 ff.; Fiedler, darstellende Geometrie II. Aufl. S. 523 ff. und S. 739 f. — Der Inhalt dieses und des vorhergehenden Paragraphen stammt im Wesentlichen aus einer im Wintersemester 1873/74 gehaltenen Vorlesung.

**) Mit der Einschränkung, welche in § 23 zur Sprache kommt.

Einheitselement, x die Coordinate von p in dem durch a als erstes, b als zweites Fundamentalelement und e als Einheitselement definirten Coordinatensysteme, kürzer die Coordinate von p im Netze abe heissen.

Jede Zahl kann man als Quotient zweier endlichen Zahlen $x_1 : x_2$ schreiben; x_1 und x_2 nehmen unabhängig von einander alle endlichen Werthe an, nur dürfen sie nicht gleichzeitig $= 0$ angenommen werden. Jedes derartige Werthepaar (x_1, x_2) kann als Repräsentant einer bestimmten Zahl, nämlich des Quotienten $x_1 : x_2$, gelten; aber umgekehrt hat diese Zahl nicht einen, sondern unendlich viele Repräsentanten, nämlich alle Werthepaare von der Form $(\varrho x_1, \varrho x_2)$, wo ϱ eine beliebige endliche und von Null verschiedene Zahl bedeutet. Diejenigen Werthepaare, deren Glieder in rationalem Verhältniss stehen, werden die Coordinaten aller Elemente eines Netzes repräsentiren und dürfen deshalb als Repräsentanten der Elemente selbst angesehen werden. Ist im Netze abe das Paar (x_1, x_2) der Repräsentant des Elementes p mit der Coordinate x, so heissen x_1, x_2 der (gewöhnlichen) Coordinate $x = \frac{x_1}{x_2}$ entsprechende homogene Coordinaten oder homogene Coordinaten des Elementes p im Netze abe, und man bezeichnet das Element p durch (x_1, x_2). Bei endlichem x kann man $x_1 = x$, $x_2 = 1$, bei $x = \infty$ kann man $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ nehmen. Die Fundamentalelemente werden durch $(1, 0)$ und $(0, 1)$, das Einheitselement durch $(1, 1)$ dargestellt.

Die homogenen Coordinaten erweisen sich als zweckmässig schon bei der Lösung der Aufgabe: Das Doppelverhältniss von vier Elementen $pqrs$ zu berechnen, welche im Netze abe durch (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (t_1, t_2) repräsentirt werden. Sind zuerst $pqrs$ von einander und von a verschieden, so kommt:

$$(pqrs) = \frac{\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{t_1}{t_2}\right)}{\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{t_1}{t_2}\right)} = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 t_2 - y_2 t_1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(x_1 t_2 - x_2 t_1)}$$

$$= (srqp) = (rspq) = (qpsr),$$

$$(pqra) = \frac{\frac{x_1}{x_2} - \frac{z_1}{z_2}}{\frac{y_1}{y_2} - \frac{z_1}{z_2}} = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 \cdot 0 - y_2 \cdot 1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 1)}.$$

Demnach bleibt die Formel

$$(pqrs) = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 t_2 - y_2 t_1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(x_1 t_2 - x_2 t_1)}$$

noch gültig, wenn eines der Elemente nach a fällt, und schliess-

lich auch dann, wenn zwei Elemente identisch sind. — Diese Formel lässt nochmals erkennen, dass $pqrs$ in $srqp$, $rspq$, $qpsr$ permutirt werden dürfen. Sie ändert sich nicht, wenn man x_1 und x_2 durch ϱx_1 und ϱx_2 ersetzt, oder y_1 und y_2 durch ϱy_1 und ϱy_2, u. s. w., — wie vorherzusehen war.

Zu den Gebilden zweiter Stufe übergehend, nehmen wir zuerst auf einer Ebene vier feste Punkte $abce$ an, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und projiciren e aus den Punkten a, b, c auf die Geraden resp. bc, ca, ab nach e_1, e_2, e_3. Ist p_1 ein Punkt des Netzes bce_1, p_2 ein Punkt des Netzes cae_2, p der Durchschnittspunkt der Strahlen ap_1 und bp_2, endlich p_3 die Projection von p aus c auf ab, so sind die Büschel $b(caep)$ und $p(e_1aeb)$ perspectiv, folglich

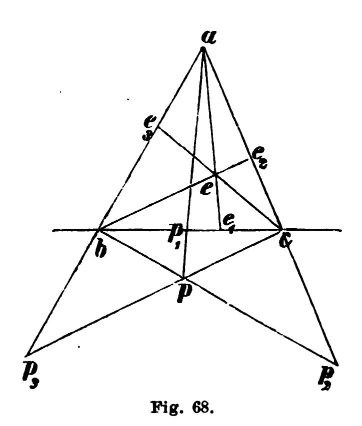


Fig. 68.

$$(cae_2p_2) = b(caep) = p(e_1aeb),$$
$$(bce_1p_1) = p(bce_1a) = p(e_1abc);$$

es existirt also auch ein Doppelverhältniss

$$p(e_1ace) = c(bape) = (bap_3e_3) = (abe_3p_3),$$

d. h. p_3 ist ein Punkt des Netzes abe_3. Jeder Punkt p der Ebene abc, welcher sich aus a, b, c auf resp. bc, ca, ab nach Punkten der Netze bce_1, cae_2, abe_3 projicirt, wird ein Punkt des Netzes $abce$ genannt; insbesondere sind alle Punkte der Netze bce_1, cae_2, abe_3 Punkte des Netzes $abce$. Bezeichnet man mit v_1, v_2 die Coordinaten von p_1 im Netze bce_1, mit w_1, w_2 die von p_2 im Netze cae_2, mit x_1, x_2 die von p_3 im Netze abe_3, so ist

$$\frac{v_1}{v_2}\frac{w_1}{w_2}\frac{x_1}{x_2} = (bce_1p_1)(cae_2p_2)(abe_3p_3) = p(e_1aeb) \cdot p(e_1abc) \cdot p(e_1ace) = 1.$$

Bezeichnet man ferner den gemeinschaftlichen Werth der Quotienten

$$\frac{x_2v_2}{v_1} = \frac{x_1w_1}{w_2}$$

mit x_3, so ist

$$x_2 : x_3 = v_1 : v_2, \qquad x_3 : x_1 = w_1 : w_2.$$

Es giebt also drei Zahlen x_1, x_2, x_3 von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{x_2}{x_3} = (bce_1p_1) = a(bcep), \quad \frac{x_3}{x_1} = (cae_2p_2) = b(caep),$$
$$\frac{x_1}{x_2} = (abe_3p_3) = c(abep).$$

Dies bleibt auch dann richtig, wenn p auf einer Seite des Dreiecks abc, aber nicht in einer Ecke liegt. Fällt p z. B. in die ab, aber nicht nach a oder b selbst, so fallen $p_1 p_2 p_3$ resp. nach bap, und man hat $x_3 = 0$, während x_1 und x_2 von Null verschieden sind. Liegt p aber in einer Ecke jenes Dreiecks, so wird einer der Punkte $p_1 p_2 p_3$ unbestimmt; wenn p sich z. B. mit a deckt, so wird p_1 unbestimmt, p_2 und p_3 fallen nach a, man nimmt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und für x_1 eine beliebige endliche, von Null verschiedene Zahl.

Da von den Quotienten $x_2 : x_3$, $x_3 : x_1$, $x_1 : x_2$ höchstens einer unbestimmt werden kann, so liefern die Zahlen x_1, x_2, x_3 mindestens für zwei von den Punkten p_1, p_2, p_3 oder von den Strahlen ap_1, bp_2, cp_3 bestimmte Lagen und also stets den Punkt p als Durchschnittspunkt dieser Strahlen. Umgekehrt werden durch p die drei Zahlen nicht vollkommen bestimmt, vielmehr sind mit dem Werthsystem (x_1, x_2, x_3) als Repräsentanten des Punktes p allemal unendlich viele andere gleichberechtigt, nämlich alle Systeme $(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3)$, wo ϱ eine beliebige endliche, von Null verschiedene Zahl bedeutet. Wenn wir daher x_1, x_2, x_3 Coordinaten des Punktes p im Netze $abce$ nennen, so sind diese Coordinaten als homogene zu bezeichnen. Abgesehen davon, dass sie nicht gleichzeitig Null werden können, unterliegen die Coordinaten noch der Beschränkung, dass ihre Verhältnisse rationale Zahlen sein müssen, können jedoch im Uebrigen beliebig angenommen werden.

Für alle Punkte der Netze bce_1, cae_2, abe_3 — aber nur für diese — ist beziehungsweise $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Die Punkte a, b, c haben der Reihe nach die Repräsentanten (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) und heissen der erste, zweite, dritte Fundamentalpunkt. Der Punkt e hat die Coordinaten (1, 1, 1) und heisst der Einheitspunkt. Die drei Fundamentalpunkte (in fester Reihenfolge) bestimmen mit dem Einheitspunkte das Coordinatensystem.

Nimmt man jetzt auf einer Ebene vier feste Geraden $ABCE$ an, von denen keine drei durch einen Punkt laufen, und nennt jede Gerade G, für welche zwei von den Doppelverhältnissen $A(BCEG)$, $B(CAEG)$, $C(ABEG)$ existiren, eine Gerade des Netzes $ABCE$, so kann man für die Geraden dieses Netzes homogene Coordinaten u_1, u_2, u_3 derart einführen, dass im Allgemeinen

$$\frac{u_2}{u_3} = A(BCEG), \quad \frac{u_3}{u_1} = B(CAEG), \quad \frac{u_1}{u_2} = C(ABEG).$$

Existiren zwei von diesen Doppelverhältnissen, so existirt auch das dritte, ausser wenn G eine der Geraden ABC ist. Für A nimmt man als Coordinaten (1, 0, 0) oder (ϱ, 0, 0), für B (0, 1, 0) oder

$(0, \varrho, 0)$, für C $(0, 0, 1)$ oder $(0, 0, \varrho)$, E wird durch $(1, 1, 1)$ oder $(\varrho, \varrho, \varrho)$ dargestellt. Die Geraden $ABCE$ bestimmen, die drei ersten als Fundamentallinien, die letzte als Einheitslinie, das Coordinatensystem.

Man pflegt in der Ebene Punkt- und Liniencoordinaten gleichzeitig einzuführen, indem man in ihr ein Dreieck und ein Paar Elemente, welche in Bezug auf das Dreieck Pol und Polare (§ 11 Seite 91) sind, festhält. Es seien abc die Ecken des Dreiecks, ABC ihre Gegenseiten, der Punkt e Pol der Geraden E für abc; von den Punkten $abce$ sollen keine drei auf einer Geraden, also auch von den Strahlen $ABCE$ keine drei in einem Büschel liegen. (Die Figuren $abce$ $ABCE$ und $ABCE$ $abce$ sind polarreciprok.) Nehmen wir einen Punkt $p(x_1, x_2, x_3)$ im Netze $abce$ und eine Gerade $G(u_1, u_2, u_3)$ im Netze $ABCE$, dann wird G von den Strahlen A, B, C, ap, bp, cp resp. in $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p_1, p_2, p_3$ so getroffen, dass

$$(\gamma_2\gamma_3\gamma_1p_1) = -\frac{x_3u_3}{x_2u_2}, \quad (\gamma_3\gamma_1\gamma_2p_2) = -\frac{x_1u_1}{x_3u_3}, \quad (\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_3) = -\frac{x_2u_2}{x_1u_1},$$

oder

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_1) = \frac{x_2u_2}{x_2u_2 + x_3u_3}, \quad (\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_2) = \frac{x_1u_1 + x_3u_3}{x_1u_1},$$

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_3) = -\frac{x_2u_2}{x_1u_1};$$

denn bedeutet für einen Augenblick ε den Punkt AE, so ist

$$a(bcep) = \frac{x_2}{x_3}, \quad A(BCEG) = (cb\varepsilon\gamma_1) = \frac{u_2}{u_3}, \quad a(cbe\varepsilon) = -1,$$

$$-\frac{x_2u_2}{x_3u_3} = a(cbpe).a(cbe\varepsilon).a(cb\varepsilon\gamma_1) = a(cbp\gamma_1) = (\gamma_2\gamma_3p_1\gamma_1) \text{ u.s.w.}$$

Liegt p auf G, so fällt p mit p_1, p_2, p_3 zusammen, die Doppelverhältnisse $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_1)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_2)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3p_3)$ werden identisch, die Summe $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ wird Null, und umgekehrt. Man überzeugt sich leicht, dass dies auch dann richtig bleibt, wenn eine oder mehrere Coordinaten verschwinden.

Sind nun $q(y_1, y_2, y_3)$ und $r(z_1, z_2, z_3)$ Punkte des Netzes $abce$, und macht man

$$v_1 = y_2z_3 - y_3z_2, \quad v_2 = y_3z_1 - y_1z_3, \quad v_3 = y_1z_2 - y_2z_1,$$

so verhalten sich v_1, v_2, v_3 wie ganze Zahlen, ohne gleichzeitig verschwinden zu können, und stellen, da

$$y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = 0, \qquad z_1v_1 + z_2v_2 + z_3v_3 = 0,$$

eine Gerade dar, welche zum Netze $ABCE$ gehört und die Punkte qr enthält, d. h.: *Verbindet man zwei Punkte des Netzes $abce$, so*

erhält man eine Gerade des Netzes $ABCE$; sucht man den Durchschnittspunkt zweier Geraden des Netzes $ABCE$, so erhält man einen Punkt des Netzes $abce$. Nennen wir daher solche Geraden auch „Geraden des Netzes $abce$“, ihre Coordinaten auch „Coordinaten im Netze $abce$“, jene Punkte auch „Punkte des Netzes $ABCE$“ u. s. w., so *sind alle Punkte und Geraden, welche aus den Punkten $abce$ oder aus den Geraden $ABCE$ dadurch hervorgehen, dass man in der Ebene abc nur Punkte durch Geraden verbindet und Durchschnittspunkte von Geraden aufsucht, Elemente des Netzes $abce$ oder nach Belieben $ABCE$ zu nennen.* Und nach § 15 (Seite 120 f.) *lassen sich alle Elemente des Netzes aus den Punkten $abce$ oder aus den Geraden $ABCE$ durch jene Constructionen allein herstellen.*

Die Gleichung $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Aneinanderliegen der Elemente (x_1, x_2, x_3) und (u_1, u_2, u_3), von denen das eine ein Punkt, das andere eine Gerade des Netzes $abce$ ist.

Das Element (x_1, x_2, x_3) werde mit x bezeichnet, das Element (p_1, p_2, p_3) mit p u. s. w. Durch den Punkt x des Netzes $abce$ kann man vier zum Netze gehörige Strahlen ziehen, indem man x mit vier Punkten $pqrs$ des Netzes verbindet. Der Strahl xp hat die Coordinaten

$$x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad x_1 p_2 - x_2 p_1.$$

Folglich ist das Doppelverhältniss

$$A(B,C,E,xp) = \frac{x_3 p_1 - x_1 p_3}{x_1 p_2 - x_2 p_1}, \text{ ebenso } A(B,C,E,xq) = \frac{x_3 q_1 - x_1 q_3}{x_1 q_2 - x_2 q_1} \text{ u. s. w.}$$

Daraus ergibt sich aber auch für die Strahlen xp, xq, xr, xs ein Doppelverhältniss

$$\frac{(x_3 p_1 - x_1 p_3)(x_1 r_2 - x_2 r_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1)(x_3 r_1 - x_1 r_3)}{(x_3 q_1 - x_1 q_3)(x_1 r_2 - x_2 r_1) - (x_1 q_2 - x_2 q_1)(x_3 r_1 - x_1 r_3)} \times$$
$$\frac{(x_3 q_1 - x_1 q_3)(x_1 s_2 - x_2 s_1) - (x_1 q_2 - x_2 q_1)(x_3 s_1 - x_1 s_3)}{(x_3 p_1 - x_1 p_3)(x_1 s_2 - x_2 s_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1)(x_3 s_1 - x_1 s_3)},$$

und wenn z. B. (xpr) die Determinante $\Sigma \pm x_1 p_2 r_3$ bedeutet, so ist

$$x(pqrs) = \frac{(xpr)(xqs)}{(xqr)(xps)}.$$

War $x_1 = 0$, so musste man ABC durch BCA oder CAB ersetzen.

Auf der Geraden u des Netzes $abce$ kann man vier Punkte des Netzes bestimmen, indem man u mit vier Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ des Netzes zum Schneiden bringt. Für diese Punkte ergiebt sich das Doppelverhältniss

$$u(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{(u\alpha\gamma)(u\beta\delta)}{(u\beta\gamma)(u\alpha\delta)}.$$

Sind also $xpqrs$ gleichartige Elemente des Netzes $abce$, und liegen von den vier Elementen $pqrs$ keine drei in einem einförmigen Gebilde, so existiren mindestens zwei von den Doppelverhältnissen

$$p(qrsx), \quad q(rpsx), \quad r(pqsx),$$

d. h. x ist ein Element des Netzes $pqrs$, und überhaupt alle Punkte und Geraden des Netzes $abce$ gehören zum Netze $pqrs$, insbesondere $abce\,ABCE$ selbst. *Bezeichnet man mit $pqrs$ vier Punkte des Netzes $abce$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, oder vier Geraden des Netzes $abce$, von denen keine drei sich in einem Punkte treffen, so gehören alle Elemente des Netzes $abce$ auch zum Netze $pqrs$ und umgekehrt.*

Die vorstehenden planimetrischen Betrachtungen lassen sich sofort auf centrische Figuren übertragen. Durch einen beliebigen Punkt ziehe man drei Strahlen abc, welche durch drei Ebenen ABC verbunden werden, und ausserhalb dieser Ebenen einen Strahl e nebst der (nach § 11 Seite 92) als Polare für abc zu e gehörigen Ebene E. Diejenigen Strahlen und Ebenen des Bündels abc, welche aus den Strahlen $abce$ oder aus den Ebenen $ABCE$ dadurch hervorgehen, dass man nur Strahlen durch Ebenen verbindet und Durchschnittslinien von Ebenen aufsucht, werden Elemente des Netzes $abce$ oder $ABCE$ genannt. Sind $pqrs$ vier Strahlen oder vier Ebenen des Netzes $abce$, von denen keine drei in einem Büschel liegen, so gehören alle Elemente des Netzes $abce$ auch zum Netze $pqrs$ und umgekehrt. Diese Elemente haben je drei homogene Coordinaten im Netze $abce$ oder $ABCE$; abc heissen Fundamentalstrahlen, e Einheitsstrahl, ABC Fundamentalebenen, E Einheitsebene des Coordinatensystemes. Sind $x_1 x_2 x_3$ die Coordinaten des Strahles x, $u_1 u_2 u_3$ die der Ebene u im Netze $abce$, so hat man:

$$\frac{x_2}{x_3} = a(bcex) \quad \text{u. s. w.,} \quad \frac{u_2}{u_3} = A(BCEu) \quad \text{u. s. w.}$$

Der Strahl x und die Ebene u liegen dann und nur dann aneinander, wenn

$$x_1 u_1 + x_2 x_2 + x_3 u_3 = 0.$$

Sind $xpqrs$ Strahlen oder Ebenen des Netzes, so hat man:

$$x(pqrs) = \frac{(xpr)(xqs)}{(xqr)(xps)}.$$

Damit verlassen wir die Gebilde zweiter Stufe. Wir nehmen jetzt fünf feste Punkte an, $abcde$, von denen keine vier auf einer

Ebene liegen, und projiciren e aus den Punkten a, b, c, d auf die Ebenen resp. bcd, cda, dab, abc nach e_1, e_2, e_3, e_4. Die Ebene abe mag die Gerade cd im Punkte e_{12} schneiden, die Ebene ace die Gerade bd im Punkte e_{13} u. s. w. Sind p_{12}, p_{23}, p_{34} Punkte resp. der Netze cde_{12}, ade_{23}, abe_{34}, ist p der Durchschnittspunkt der Ebenen abp_{12}, bcp_{23}, cdp_{34}, und werden die Geraden ac, ad, bd resp. von den Ebenen bdp, bcp, acp in den Punkten p_{24}, p_{23}, p_{13} getroffen, so sind p_{24}, p_{23}, p_{13} Punkte resp. der Netze ace_{24}, ade_{23}, bde_{13}; denn wenn man noch p aus a, b, c, d resp. auf bcd, cda, dab, abc nach p_1, p_2, p_3, p_4 projicirt, so ist in der Ebene cda der Punkt e_2 aus c, d, a auf resp. da, ac, cd nach e_{23}, e_{24}, e_{12} projicirt, ebenso p_2 nach p_{23}, p_{24}, p_{12}, folglich liegt p_{24} im Netze ace_{24} u. s. w.; und man bemerkt, dass die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 resp. zu den Netzen $bcde_1$, $cdae_2$, $dabe_3$, $abce_4$ gehören. Jeder Punkt p, welcher sich aus a, b, c, d auf resp. bcd, cda, dab, abc nach Punkten der Netze $bcde_1$, $cdae_2$, $dabe_3$, $abce_4$ projicirt, wird ein Punkt des Netzes $abcde$ genannt; die Gerade cd wird von der Ebene abp in einem Punkte p_{12} des Netzes cde_{12} getroffen u. s. w. Insbesondere sind alle Punkte der Netze $bcde_1$, $cdae_2$, $dabe_3$, $abce_4$ zum Netze $abcde$ zu rechnen.

Es seien $x_1 x_2 x_3$ die Coordinaten von p_4 im Netze $abce_4$, also

$$\frac{x_2}{x_3} = (bce_{14}p_{14}), \quad \frac{x_3}{x_1} = (cae_{24}p_{24}), \quad \frac{x_1}{x_2} = (abe_{34}p_{34}).$$

Dann kann man die Zahl x_4 so hinzufügen, dass $x_2 x_3 x_4$ die Coordinaten von p_1 im Netze $bcde_1$ werden, dass also noch

$$\frac{x_3}{x_4} = (cde_{12}p_{12}), \quad \frac{x_4}{x_2} = (dbe_{13}p_{13}).$$

Aus den Werthen von $(ace_{24}\,p_{24})$ und $(cde_{12}\,p_{12})$, oder von $(abe_{34}\,p_{34})$ und $(bde_{13}\,p_{13})$ folgt:

$$\frac{x_4}{x_1} = (dae_{23}\,p_{23}).$$

Die Zahlen $x_1 x_2 x_3 x_4$ haben also die Eigenschaft, dass $x_2 x_3 x_4$ die Coordinaten von p_1 im Netze $bcde_1$, $x_3 x_4 x_1$ die von p_2 im Netze $cdae_2$, $x_4 x_1 x_2$ die von p_3 im Netze $dabe_3$, $x_1 x_2 x_3$ die von p_4 im Netze $abce_4$ vorstellen. Solche Zahlen sind auch dann vorhanden, wenn p mit zweien der Punkte $abcd$ in gerader Linie liegt, aber in keinen dieser Punkte fällt. Liegt p z. B. in der ab, aber nicht in a oder b, so fallen $p_1 p_2 p_3 p_4$ nach resp. $b\,a\,p\,p$, und man hat $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, aber x_1, x_2 nicht Null. Vereinigt sich p mit einem der Punkte $abcd$, so wird eine der Projectionen $p_1 p_2 p_3 p_4$ unbestimmt; fällt p z. B. nach a, so wird p_1 unbestimmt, $p_2 p_3 p_4$ fallen

nach a, man nimmt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und für x_1 irgend eine endliche, von Null verschiedene Zahl.

Die Zahlen $x_1 x_2 x_3 x_4$ bestimmen den Punkt p als Durchschnittspunkt der Ebenen abp_{12}, acp_{13} u. s. w. und heissen Coordinaten von p im Netze $abcde$; man kann statt ihrer auch ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3, ϱx_4 nehmen, wenn ϱ weder 0 noch ∞ ist. Diese Coordinaten sind wieder als homogene zu bezeichnen; sie können nicht gleichzeitig Null werden, ihre Verhältnisse sind rationale Zahlen, andere Beschränkungen bestehen nicht. Für alle Punkte des Netzes $bcde_1$ ist $x_1 = 0$, für alle Punkte des Netzes cde_{12} ist $x_1 = x_2 = 0$, u. s. w. Die Punkte a, b, c, d, e haben der Reihe nach die Repräsentanten (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1) und heissen der erste, zweite, dritte, vierte Fundamentalpunkt, beziehungsweise der Einheitspunkt. Die vier Fundamentalpunkte (in fester Reihenfolge) bestimmen mit dem Einheitspunkte das Coordinatensystem.

Analog werden nach dem Gesetze von der Reciprocität zwischen Punkt und Ebene, wenn von den fünf festen Ebenen $ABCDE$ keine vier in einem Bündel liegen, die Ebenen des Netzes $ABCDE$ und ihre Coordinaten definirt; $ABCD$ werden die Fundamentalebenen, E die Einheitsebene des Coordinatensystemes. Ist P eine Ebene des Netzes $ABCDE$ mit den Coordinaten $u_1 u_2 u_3 u_4$, so hat man im Allgemeinen:

$$\frac{u_1}{u_2} = (CDA,\ CDB,\ CDE,\ CDP),$$

$$\frac{u_1}{u_3} = (BDA,\ BDC,\ BDE,\ BDP), \quad \text{u. s. w.}$$

Man pflegt Punkt- und Ebenencoordinaten gleichzeitig einzuführen, indem man vier feste Punkte a, b, c, d, welche durch vier Ebenen A, B, C, D (nämlich bcd, cda, dab, abc) verbunden werden, und ausserhalb dieser Ebenen einen Punkt e nebst seiner Polarebene E für $abcd$ (§ 11 Schluss) annimmt, so dass $abcde\ ABCDE$ und $ABCDE\ abcde$ polarreciprok werden. Der Punkt e_1, in welchem die Gerade ae der Ebene A begegnet, ist dann der Pol der Geraden AE für bcd. Es sei $p\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ein Punkt im Netze $abcde$, $P(u_1, u_2, u_3, u_4)$ eine Ebene im Netze $ABCDE$; von den Ebenen A, B, C, D werde P in den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, von den Strahlen ap, bp, cp, dp in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 getroffen. Im Netze $bcde_1$ hat die Gerade g_1 die Coordinaten $u_2 u_3 u_4$, die Projection p' des Punktes p aus a auf A die Coordinaten $x_2 x_3 x_4$. Bezeichnet man den Punkt $g_1 g_2$ d. i. ABP (also den Durchschnittspunkt der Geraden cd mit der Ebene P) mit γ_{12} u. s. w.,

so liegen $\gamma_{12} p_3 p_4$ auf einer Geraden (nämlich auf den Ebenen P und cdp) u. s. w.

Wenn von den Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ keine drei durch einen Punkt gehen (d. h. wenn P keinen Fundamentalpunkt enthält, oder wenn $u_1 u_2 u_3 u_4$ von Null verschieden sind), so kann man auf der Ebene P etwa von g_1 den Pol ε in Bezug auf $g_2 g_3 g_4$ (oder $\gamma_{34} \gamma_{24} \gamma_{23}$) construiren und findet

$$x_2 u_2, \quad x_3 u_3, \quad x_4 u_4$$

als Coordinaten von p_2 im Netze $g_2 g_3 g_4 g_1$ (oder $\gamma_{34} \gamma_{24} \gamma_{23} \varepsilon$),

$$-x_1 u_1 - x_3 u_3 - x_4 x_4, \quad x_3 u_3, \quad x_4 u_4$$

als Coordinaten von p_1 in demselben Netze, u. s. w. Wird nämlich in der Ebene A der Punkt p' aus b auf die Gerade cd nach p'' projicirt, so erhält man nach einer oben (Seite 180) gemachten Bemerkung, wenn man noch berücksichtigt, dass $p'' p_2 \gamma_{34}$ auf einer Geraden (nämlich auf den Ebenen P und abp) liegen, und dass die Indices permutirt werden dürfen:

$$(\gamma_{13} \gamma_{14} \gamma_{12} p'') = -\frac{x_4 u_4}{x_3 u_3},$$

$$p_2(\gamma_{13} \gamma_{14} \gamma_{12} \gamma_{34}) = \gamma_{34}(\gamma_{13} \gamma_{14} \gamma_{12} p_2) = -\frac{x_4 u_4}{x_3 u_3},$$

$$p_2(\gamma_{34} \gamma_{14} \gamma_{24} \gamma_{13}) = -\frac{x_1 u_1}{x_3 u_3}, \quad \gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \gamma_{12} p_1) = -\frac{x_3 u_3}{x_4 u_4};$$

$$p_2(\gamma_{34} \gamma_{14} \gamma_{24} \gamma_{12}) = p_2(\gamma_{34} \gamma_{14} \gamma_{24} \gamma_{13}) \cdot p_2(\gamma_{34} \gamma_{14} \gamma_{13} \gamma_{12}) = \frac{-x_1 u_1}{x_3 u_3 + x_4 u_4},$$

$$p_2(\gamma_{13} \gamma_{34} \gamma_{23} \gamma_{24}) = \frac{-x_4 u_4}{x_1 u_1 + x_3 u_3}, \quad \gamma_{24}(\gamma_{23} \gamma_{34} \gamma_{13} p_2) = \frac{x_4 u_4}{x_1 u_1 + x_3 u_3 + x_4 u_4};$$

$$\gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \varepsilon p_1) = \gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \varepsilon \gamma_{12}) \cdot \gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \gamma_{12} p_1) = \frac{x_3 u_3}{x_4 u_4},$$

$$\gamma_{24}(\gamma_{23} \gamma_{34} \varepsilon p_1) = \frac{x_4 u_4}{x_2 u_2}, \quad \gamma_{23}(\gamma_{34} \gamma_{24} \varepsilon p_1) = \frac{x_2 u_2}{x_3 u_3};$$

$$\gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \varepsilon p_2) = \gamma_{34}(\gamma_{24} \gamma_{23} \varepsilon p_1) = \frac{x_3 u_3}{x_4 u_4},$$

$$\gamma_{24}(\gamma_{23} \gamma_{34} \varepsilon p_2) = \frac{-x_4 u_4}{x_1 u_1 + x_3 u_3 + x_4 u_4},$$

$$\gamma_{23}(\gamma_{34} \gamma_{24} \varepsilon p_2) = \frac{x_1 u_1 + x_3 u_3 + x_4 u_4}{-x_3 u_3}.$$

Liegt p auf P, so fällt p mit p_1, p_2, p_3, p_4 zusammen, die Summe $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$ wird Null, und umgekehrt. Von der Beschränkung, dass P keinen Fundamentalpunkt enthalten soll, kann man sich leicht befreien. Sind daher $q(y_1 y_2 y_3 y_4)$, $r(z_1 z_2 z_3 z_4)$, $s(t_1 t_2 t_3 t_4)$ Punkte des Netzes $abcde$, und setzt man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = v_1, \quad \begin{vmatrix} y_3 & y_1 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_4 \\ t_3 & t_1 & t_4 \end{vmatrix} = v_2,$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_4 \end{vmatrix} = v_3, \quad - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = v_4,$$

so verschwinden die Summen

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4, \quad z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 v_3 + z_4 v_4,$$
$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 + t_4 v_4,$$

und es stellen $v_1 v_2 v_3 v_4$ eine Ebene dar, welche zum Netze $ABCDE$ gehört und die Punkte q, r, s enthält, d. h.: *Verbindet man drei Punkte des Netzes $abcde$, so erhält man eine Ebene des Netzes $ABCDE$; sucht man den Durchschnittspunkt dreier Ebenen des Netzes $ABCDE$, so erhält man einen Punkt des Netzes $abcde$.* Demnach fallen die Geraden, welche je zwei Punkte des Netzes $abcde$ verbinden, mit den Geraden, in welchen je zwei Ebenen des Netzes $ABCDE$ sich schneiden, zusammen. Diese Geraden sollen „Geraden des Netzes $abcde$" oder „Geraden des Netzes $ABCDE$", die Ebenen des Netzes $ABCDE$ auch „Ebenen des Netzes $abcde$", ihre Coordinaten auch „Coordinaten im Netze $abcde$", die Punkte des Netzes $abcde$ auch „Punkte des Netzes $ABCDE$", ihre Coordinaten auch „Coordinaten im Netze $ABCDE$" heissen. *Alle Punkte, Geraden und Ebenen, welche aus den Punkten $abcde$ oder aus den Ebenen $ABCDE$ durch graphische Constructionen hervorgehen, sind Elemente des Netzes $abcde$ (oder des Netzes $ABCDE$).* Und *alle Elemente des Netzes werden aus den Punkten $abcde$ oder aus den Ebenen $ABCDE$ durch graphische Constructionen hergestellt.*

Die Gleichung $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Aneinanderliegen der Elemente $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ und $(u_1 u_2 u_3 u_4)$, von denen das eine ein Punkt, das andere eine Ebene des Netzes $abcde$ ist.

Das Element $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ werde mit x bezeichnet, das Element $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ mit y u. s. w. Durch die Punkte x und y des Netzes $abcde$ kann man vier zum Netze gehörige Ebenen legen, indem man die Gerade xy mit vier Punkten $pqrs$ des Netzes verbindet. Die Ebene xyp hat die Coordinaten $\Sigma \pm x_2 y_3 p_4$, $\Sigma \pm x_3 y_1 p_4$ u. s. w., so dass

$$CD(A, B, E, xyp) = \frac{\Sigma \pm x_2 y_3 p_4}{\Sigma \pm x_3 y_1 p_4},$$

ebenso

$$CD(A, B, E, xyq) = \frac{\Sigma \pm x_2 y_3 q_4}{\Sigma \pm x_3 y_1 q_4}$$

u. s. w. Folglich bestimmen die Ebenen xyp, xyq, xyr, xys ein Doppelverhältniss

$$\frac{\Sigma \pm x_2 y_3 p_4 . \Sigma \pm x_3 y_1 r_4 - \Sigma \pm x_3 y_1 p_4 . \Sigma \pm x_2 y_3 r_4}{\Sigma \pm x_2 y_3 q_4 . \Sigma \pm x_3 y_1 r_4 - \Sigma \pm x_3 y_1 q_4 . \Sigma \pm x_2 y_3 r_4}$$

$$\times \frac{\Sigma \pm x_2 y_3 q_4 . \Sigma \pm x_3 y_1 s_4 - \Sigma \pm x_3 y_1 q_4 . \Sigma \pm x_2 y_3 s_4}{\Sigma \pm x_2 y_3 p_4 . \Sigma \pm x_3 y_1 s_4 - \Sigma \pm x_3 y_1 p_4 . \Sigma \pm x_2 y_3 s_4}.$$

Bedeutet daher z. B. $(xypr)$ die Determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 p_3 r_4$, so ist

$$xy(pqrs) = \frac{(xypr)(xyqs)}{(xyqr)(xyps)}.$$

Im Falle $x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0$, d. i. $x_3 : x_4 = y_3 : y_4$, ersetzt man $ABCD$ durch eine Permutation.

Auf der Durchschnittslinie zweier Ebenen u und v des Netzes $abcde$ werden vier Punkte des Netzes bestimmt, indem man die Gerade uv mit vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ des Netzes durchschneidet. Für diese Punkte ergiebt sich das Doppelverhältniss

$$uv(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{(uv\alpha\gamma)(uv\beta\delta)}{(uv\beta\gamma)(uv\alpha\delta)}.$$

Sind also $xypqrs$ gleichartige Elemente des Netzes $abcde$, und liegen von den fünf Elementen $pqrsx$ keine vier in einem Gebilde zweiter Stufe, so existiren mindestens drei von den Doppelverhältnissen

$$rs(pqxy), \quad qs(prxy), \quad qr(psxy) \quad \text{u. s. w.},$$

d. h. y ist ein Element des Netzes $pqrsx$, und überhaupt alle Elemente des Netzes $abcde$ gehören zum Netze $pqrsx$, insbesondere $abcde$ $ABCDE$ selbst. *Bezeichnet man mit $pqrsx$ fünf Punkte des Netzes $abcde$, von denen keine vier in einer Ebene liegen, oder fünf Ebenen des Netzes $abcde$, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, so sind alle Elemente des Netzes $abcde$ auch Elemente des Netzes $pqrsx$ und umgekehrt.*

§ 23. Die stetige Zahlenreihe in der Geometrie.

Wurden fünf Punkte a, b, c, d, e festgehalten, von denen keine vier in einer Ebene liegen, so konnten wir jedes Element des Netzes $abcde$ durch Zahlen darstellen. Jeder graphischen Beziehung zwischen solchen Elementen entsprach ein gewisser Zusammenhang zwischen den Zahlen, welche zur Darstellung der Elemente dienten.

Es war aber noch nicht zu erkennen, ob sich die analytische Behandlung auf alle Elemente ausdehnen lässt.

Zuerst waren Zahlen zur Unterscheidung der Elemente von Netzen in einförmigen Gebilden eingeführt worden; wir werden demgemäss auch jetzt zuerst ein einförmiges Gebilde in Betracht ziehen. Es seien a, b, e beliebige Punkte einer Geraden, welche den eigentlichen Punkt p enthält, und in dieser Geraden mögen die eigentlichen Punkte f und g auf verschiedenen Seiten von p angenommen werden. Im Netze abe kann ich (§ 21 Seite 176) einen eigentlichen Punkt B zwischen f und p, einen eigentlichen Punkt E zwischen p und g, endlich einen nicht zur Strecke BE gehörigen Punkt A construiren, so dass BE durch Ap getrennt werden, und um festzustellen, ob p zum Netze abe gehört, brauche ich nur die Beziehung jenes Punktes zum Netze ABE zu untersuchen. Wenn nun der Punkt p einen Index im Netze ABE besitzt, so ist der letztere jedenfalls zwischen 0 und 1 gelegen (§ 21 Seite 176); es wird daher genügen, die Punkte des Netzes ABE, welche den Indices

$$\frac{1}{2};\quad \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4};\ \ldots$$

entsprechen, der Reihe nach zu construiren und darauf zu achten, ob man unter ihnen dem Punkte p begegnet.

Allein nach den bereits in den beiden ersten Paragraphen (Seite 18 und 25, vergl. auch § 15 Schluss) gemachten Bemerkungen ist diese Construction nicht beliebig weit auszudehnen, vielmehr lässt sich allemal unter Berücksichtigung der Verhältnisse des einzelnen Falles eine Grenze angeben, welche man nicht zu überschreiten hat. Um eine solche Grenze zu ermitteln, geht man von der Erwägung aus:

> dass man in jedem einzelnen Falle eine Strecke MN anzugeben vermag, innerhalb deren einzelne Punkte nicht mehr von einander unterschieden werden, und dass von jeder congruenten oder kleineren Strecke dasselbe gilt.

(Vergl. die Einleitung, Seite 3.) Man mache nun auf der Geraden ab zu beiden Seiten von p die Strecken ph und pk mit MN congruent und bestimme zwei Punkte h' und k' des Netzes ABE, welche zwischen p und h, resp. zwischen p und k fallen; die Indices von h' und k' im Netze ABE sind positive echte Brüche, welche — auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner gebracht —

durch $\frac{r}{v}$, $\frac{s}{v}$ dargestellt werden mögen. Da p zwischen h' und k' liegt, so können (§ 21 Seite 176) als etwaige Indices von p im Netze ABE nur diejenigen (positiven, echt gebrochenen) Zahlen in Betracht kommen, welche zwischen $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$ liegen. Mindestens eine solche Zahl kommt in der Reihe

$$\frac{1}{v+1}, \frac{2}{v+1}, \cdots, \frac{v}{v+1}$$

vor; der entsprechende Punkt ist, wenn er nicht genau mit p zusammenfällt, doch nicht merklich von p verschieden, da er sonst zwischen h' und p oder zwischen p und k' müsste eingeschaltet werden können. Dasselbe gilt für die Nenner $v+2$, $v+3$, $\cdots$; überhaupt werden die Punkte, welche den Zahlen zwischen $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$ entsprechen, soweit deren Construction gelingt, von p nicht merklich differiren.

Wenn man nicht schon unter den positiven echten Brüchen mit kleinerem Nenner eine Zahl angetroffen hat, welche den Punkt p genau darstellt, so wird es hiernach zwecklos sein, die Versuche über den Nenner $v+1$ hinaus fortzusetzen, und so führt immer eine endliche Anzahl von Constructionen zu einer Zahl ξ, welche als Index im Netze ABE den Punkt p mit hinreichender Genauigkeit darstellt. Endlich berechnet man eine rationale Zahl x, welche als Index im Netze abe den Punkt p hinreichend genau angiebt, aus der Gleichung

$$\xi = \frac{(abeA)-(abeE)}{(abeB)-(abeE)} \cdot \frac{(abeB)-x}{(abeA)-x}.$$

Es werde jetzt ein Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel angenommen, und in ihm werden drei Strahlen $\alpha\beta\varepsilon$ festgehalten. Bezeichnet man mit ϱ einen beliebigen Strahl des Büschels, so entsteht die Frage, ob ϱ durch einen Index im Netze $\alpha\beta\varepsilon$ dargestellt werden kann. Man lege durch einen (vom Scheitel des Büschels möglichst entfernten) eigentlichen Punkt p des Strahles ϱ eine Gerade, welche α, β, ε in resp. a, b, e schneidet, und bestimme eine rationale Zahl x, welche als Index im Netze abe den Punkt p genau oder doch hinreichend genau wiedergiebt; die Zahl x, als Index im Netze $\alpha\beta\varepsilon$ aufgefasst, darf für einen hinreichend genauen Repräsentanten des Strahles ϱ erklärt werden. Auf diese Bestimmung kann man immer zurückgehen, wenn in einem einförmigen Gebilde vier Elemente $a'b'e'p'$ gegeben sind und gefragt wird, ob zu p' ein Index im Netze $a'b'e'$ gehört; denn man kann im Büschel $\alpha\beta$

den Strahl ϱ derart construiren, dass die Figuren $\alpha\beta\varepsilon\varrho$ und $a'b'e'p'$ projectiv werden, und darf dann die nach der obigen Vorschrift bestimmte Zahl x, als Index im Netze $a'b'e'$ aufgefasst, für einen hinreichend genauen Repräsentanten des Elementes p' erklären.

Da hiermit die Möglichkeit gegeben ist, in jedem einförmigen Gebilde die Lage eines beliebigen Elementes gegen drei feste durch eine gewöhnliche Coordinate und folglich auch durch zwei homogene Coordinaten hinreichend genau zu bezeichnen, so wird die entsprechende Forderung zunächst für die Gebilde zweiter Stufe ebenfalls erfüllbar. Sind z. B. $abce$ vier Punkte einer Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, p ein Punkt der Ebene abc ausserhalb der Geraden bc ca ab, so untersucht man, wie der Strahl ap gegen die Strahlen ab ac ae liegt, der Strahl bp gegen bc ba be, u. s. w. Hat man zwei dieser Strahlen möglichst genau durch Indices in den betreffenden Netzen dargestellt, so geben die drei homogenen Coordinaten, welche nach § 22 Seite 178 den beiden Indices entsprechen, die Lage des Punktes p mit hinreichender Genauigkeit an. Versteht man endlich unter $\mathsf{AB\Gamma\Delta E}$ fünf Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, unter p einen Punkt ausserhalb der Ebenen $\mathsf{B\Gamma\Delta}$ $\mathsf{\Gamma\Delta A}$ $\mathsf{\Delta AB}$ $\mathsf{AB\Gamma}$ oder eine Ebene ausserhalb der Bündel $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$, so ergeben sich aus drei Indices-Bestimmungen die vier homogenen Coordinaten eines mit p genau oder annähernd zusammenfallenden Elementes, und wenn es sich darum handelt, die Lage einer Geraden zu bezeichnen, so werden zwei an ihr gelegene Punkte oder Ebenen benutzt.

Uebrigens kann man als gegebene Elemente in letzter Linie stets eine Anzahl von eigentlichen Punkten ansehen, welche möglichst genau durch eigentliche Punkte des Netzes $\mathsf{AB\Gamma\Delta E}$ darzustellen sind. Dabei wird man die zwischen den gegebenen Elementen stattfindenden Beziehungen berücksichtigen; sollen z. B. vier Punkte p q r s in einer Ebene liegen, aber p q r nicht in einer Geraden, so sucht man, nachdem die Punkte p q r und also auch die Ebene pqr dargestellt sind, von den drei für s erforderlichen Indices nur zwei direct auf, während man den dritten aus der Bedingung für das Aneinanderliegen der Ebene pqr und des Punktes s berechnet, u. s. w.

Der Einfachheit wegen wollen wir nur Punkte als gegeben betrachten. Wenn diese nicht durchweg mit Punkten des Netzes $\mathsf{AB\Gamma\Delta E}$ genau zusammenfallen, wenn also die den ermittelten Coordinaten entsprechende Figur nicht genau mit der gegebenen übereinstimmt, so kann doch die analytische Untersuchung sich nur

auf die erstere beziehen, und ihre Resultate werden an der letzteren sich *nur annähernd* bestätigen. In jedem Falle aber gelten für die analytische Untersuchung folgende Bestimmungen:

1. Jedes System von vier reellen, rationalen oder irrationalen, aber nicht gleichzeitig verschwindenden Zahlen $x_1 x_2 x_3 x_4$ wird ein in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4$ behafteter mathematischer Punkt genannt. Dabei sollen alle Systeme $\varrho x_1\ \varrho x_2\ \varrho x_3\ \varrho x_4$, wo ϱ eine beliebige, endliche und von Null verschiedene Zahl bedeutet, — aber nur solche — Repräsentanten eines und desselben Punktes sein.

2. Von den mathematischen Punkten, welche einer linearen Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

genügen, sagen wir, dass sie in einer mathematischen Ebene liegen, und nennen $u_1 u_2 u_3 u_4$ die homogenen Coordinaten dieser Ebene.

3. Von den mathematischen Punkten, welche gleichzeitig in zwei Ebenen enthalten sind, welche also zwei lineare Gleichungen

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$$

erfüllen, sagen wir, dass sie in einer mathematischen geraden Linie liegen.

Ziehen wir hieraus, ehe wir weitere Bestimmungen treffen, einige Folgerungen. Vier mathematische Punkte $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, $(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$, $(z_1\ z_2\ z_3\ z_4)$, $(t_1\ t_2\ t_3\ t_4)$ liegen dann und nur dann in einer Ebene*), wenn die Determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 z_3 t_4$ verschwindet. Drei Punkte $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ liegen dann und nur dann in einer Geraden, wenn alle Determinanten aus je drei Colonnen des Systemes

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$$

verschwinden. Nimmt man in einer Ebene drei Punkte $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, $(b_1 b_2 b_3 b_4)$, $(c_1 c_2 c_3 c_4)$ an, welche nicht in gerader Linie liegen, so werden alle Punkte der Ebene durch die Zahlensysteme

$$\varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1, \quad \varkappa a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2, \quad \varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3,$$
$$\varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4$$

repräsentirt, wo $\varkappa \lambda \mu$ unabhängig von einander alle reellen Werthe

*) Das Beiwort „mathematisch" wird bei den Punkten, Geraden und Ebenen im Folgenden weggelassen, dagegen werden die eigentlichen oder durch eigentliche Elemente definirten Elemente besonders kenntlich gemacht.

durchlaufen, aber nicht zu gleicher Zeit Null werden dürfen; die Werthe $\varrho\varkappa$ $\varrho\lambda$ $\varrho\mu$, wo ϱ beliebig, aber weder Null noch unendlich, — und nur diese — stellen denselben Punkt dar, wie $\varkappa$ λ μ. Nimmt man in einer Geraden zwei Punkte $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, $(b_1 b_2 b_3 b_4)$ an, so werden alle Punkte der Geraden durch die Zahlensysteme

$$\varkappa a_1 + \lambda b_1, \quad \varkappa a_2 + \lambda b_2, \quad \varkappa a_3 + \lambda b_3, \quad \varkappa a_4 + \lambda b_4$$

repräsentirt, wo $\varkappa$ λ unabhängig von einander alle reellen Werthe durchlaufen, aber nicht zu gleicher Zeit Null werden dürfen; behält ϱ die obige Bedeutung, so stellen die Werthe $\varrho\varkappa$ $\varrho\lambda$ — und nur diese — denselben Punkt dar, wie $\varkappa$ λ. — Werden die auf das Aneinanderliegen der „Elemente“: Punkt, gerade Linie, Ebene bezüglichen Ausdrücke und Bezeichnungsweisen in dem früher erklärten Sinne weiter beibehalten, so erkennt man, dass in den vorstehenden Bemerkungen die Worte „Punkt“ und „Ebene“ mit einander vertauscht werden dürfen, und dass die Sätze 1. 2. 4. 5. 7.—15. des achten Paragraphen gültig bleiben. Das Element $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ werde mit x bezeichnet u. s. w. Sind dann vier Ebenen eines Büschels gegeben, und nimmt man auf der Axe des Büschels zwei Punkte x, y und in jenen Ebenen, aber ausserhalb der Axe, vier Punkte resp. p, q, r, s, so stellt der Quotient

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)},$$

wo z. B. $(xypr)$ die Determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 p_3 r_4$ bedeuten soll, eine nur von den gegebenen Ebenen abhängige Zahl vor. In Rücksicht hierauf schreibt man

4. in dem Büschel, dessen Axe die Punkte x und y enthält, den vier Ebenen, welche nach den Punkten p, q, r, s (in dieser Reihenfolge) hingehen, ein bestimmtes Doppelverhältniss zu, welches durch den Ausdruck

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)}$$

definirt wird. Ebenso wird

5. auf der Geraden, in welcher die Ebenen u und v sich durchschneiden, für die vier Punkte, durch welche die Ebenen α, β, γ, δ (in dieser Reihenfolge) hindurchgehen, der nur von diesen vier Punkten abhängige Ausdruck

$$\frac{(uv\alpha\gamma)\,(uv\beta\delta)}{(uv\beta\gamma)\,(uv\alpha\delta)}$$

als Doppelverhältniss eingeführt.

Sind α, β, γ, δ die Ebenen xyp, xyq, xyr, xys, so kann man wählen:

$$\alpha_1 = \Sigma \pm x_2 y_3 p_4, \quad \alpha_2 = -\Sigma \pm x_1 y_3 p_4, \quad \alpha_3 = \Sigma \pm x_1 y_2 p_4,$$
$$\alpha_4 = -\Sigma \pm x_1 y_2 p_3$$

u. s. w. und erhält:

$$(uv\alpha\gamma) = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_r \\ v_x & v_y & v_r \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_r \end{vmatrix},$$

wo z. B. $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$. Da $\alpha_x = \alpha_y = 0$, $\alpha_r = -(xypr)$, so wird

$$(uv\alpha\gamma) = (xypr)(u_x v_y - u_y v_x),$$

ebenso

$$(uv\beta\delta) = (xyqs)(u_x v_y - u_y v_x)$$

u. s. w. Die Differenz $u_x v_y - u_y v_x$ ist nicht Null, folglich haben die Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ dasselbe Doppelverhältniss, wie die perspective Punktreihe auf der Geraden uv. Man schliesst hieraus: Je zwei perspective Punktreihen haben einerlei Doppelverhältniss, ebenso je zwei perspective Ebenenbüschel.

6. Das feste Doppelverhältniss aller Punktreihen und Ebenenbüschel, welche mit vier Strahlen eines Strahlenbüschels perspectiv liegen, wird das Doppelverhältniss der vier Strahlen genannt.

Das Doppelverhältniss von vier Elementen $abcd$ eines einförmigen Gebildes ist also gleich dem Doppelverhältnisse jeder projectiven Figur. Dasselbe soll auch der Index von d im Netze abc genannt werden; ist sein Werth eine ganze Zahl n, so soll d das n^{te} Element des Netzes abc heissen..

7. Sind $a\ b\ c\ d$ vier Elemente in einem einförmigen Gebilde, so sagt man von den Paaren ab (oder ba) und cd (oder dc), dass sie getrennt oder nicht getrennt liegen, je nachdem das Doppelverhältniss von $abcd$ negativ oder positiv ist.

Die Worte „Punkt" und „Ebene" können auch jetzt überall mit einander vertauscht werden.

Die so eingeführten Begriffe werden wieder graphische oder projective genannt. Aus ihnen werden alle Begriffe und Bezeichnungen, welche wir in der projectiven Geometrie eingeführt hatten, auch jetzt in gleicher Weise abgeleitet. Dies ist freilich nur deshalb zulässig, weil alle graphischen Sätze — *und zwar jetzt ohne jeden Vorbehalt* — gültig bleiben, wie zunächst in Kürze gezeigt werden soll.

Das Doppelverhältniss von vier Punkten $pqrs$ einer Geraden lässt sich nämlich auf eine einfache Form bringen, wenn man zwei

weitere Punkte $a\,b$ der Geraden einführt und dann für $i = 1, 2, 3, 4$ setzt:

$$p_i = a_i + \varkappa b_i,\quad q_i = a_i + \lambda b_i,\quad r_i = a_i + \mu b_i,\quad s_i = a_i + \nu b_i\,,$$

wodurch unter vorübergehender Benutzung von zwei willkürlichen Punkten xy auf einer die vorige nicht schneidenden Geraden jenes Doppelverhältniss

$$\frac{(xy\,pr)\;(xy\,qs)}{(xy\,qr)\;(xy\,ps)} = \frac{(\varkappa-\mu)\;(\lambda-\nu)}{(\lambda-\mu)\;(\varkappa-\nu)}$$

sich ergiebt. Aus dieser Form leitet man sofort den Zusammenhang zwischen den durch Permutation der Punkte $pqrs$ sich ergebenden Doppelverhältnissen ab, wie er in § 21 Seite 173 angegeben ist, und überträgt ihn auf beliebige einförmige Gebilde. Man beweist ferner für fünf Elemente $pqrst$ eines einförmigen Gebildes, dass die Doppelverhältnisse der drei Figuren $pqst$, $pqtr$, $pqrs$ als Product die Einheit liefern. Daraus folgt die Richtigkeit der vier letzten Sätze des § 7. Von den graphischen Sätzen des neunten Paragraphen braucht nur einer hier bewiesen zu werden, etwa der dritte; behält man die dortigen Bezeichnungen bei, so liefern die Doppelverhältnisse der Figuren $KLii'$, $LJkk'$, $JKll'$ das Product Eins (vgl. die Betrachtung auf Seite 178); wenn also das erste Doppelverhältniss negativ und das zweite positiv ist, so ist das dritte negativ. Die graphischen Sätze der §§ 10—12 werden aus den vorhergehenden graphischen Sätzen gefolgert. — Figuren mit gleichem Doppelverhältniss sind projectiv. Das Doppelverhältniss von vier harmonischen Elementen ist negativ und gleich seinem reciproken Werthe, also $= -1$. Je vier Elemente mit dem Doppelverhältniss -1 sind harmonisch.

Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen findet man:

$$\overset{abs}{\text{ind}}\,p = \frac{(xy\,as)\;(xy\,bp)}{(xy\,bs)\;(xy\,ap)} = \frac{\nu}{\varkappa},\quad \overset{abs}{\text{ind}}\,q = \frac{\nu}{\lambda},\quad \overset{abs}{\text{ind}}\,r = \frac{\nu}{\mu},$$

$$\overset{pqr}{\text{ind}}\,a = \frac{(xy\,pr)\;(xy\,qa)}{(xy\,qr)\;(xy\,pa)} = \frac{(\mu-\varkappa)\,\lambda}{(\mu-\lambda)\,\varkappa} = \frac{\dfrac{\nu}{\varkappa}-\dfrac{\nu}{\mu}}{\dfrac{\nu}{\lambda}-\dfrac{\nu}{\mu}}\,;$$

wenn also im Netze abs der Index von r zwischen den Indices von p und q liegt, so ist das Doppelverhältniss der Punkte $pqra$ negativ, die Paare pq und ra liegen getrennt. — Die Punkte $pqra$ liegen harmonisch unter der Bedingung

$$\frac{2}{\mu} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda}.$$

Diese ist u. A. erfüllt, wenn p, q, r im Netze abs die Indices $n-1$, $n+1$, n besitzen, wo n eine ganze Zahl bedeutet, d. h. auch bei

der jetzigen Definition der ganzzahligen Indices wird der $(n-1)^{\text{te}}$ Punkt des Netzes vom $(n+1)^{\text{ten}}$ durch den n^{ten} und den Nullpunkt harmonisch getrennt, die Definition fällt also mit der früheren zusammen. Werden nun in einer Geraden die Punkte AB_1 durch B_0P getrennt, ist also das Doppelverhältniss der Punkte AB_1B_0P negativ, folglich das der Punkte AB_0B_1P grösser als Eins, ist ferner n die grösste positive ganze Zahl, welche den Index von P im Netze AB_0B_1 nicht übersteigt, B_n der n^{te} und B_{n+1} der $(n+1)^{\text{te}}$ Punkt des Netzes AB_0B_1, so fällt entweder B_n mit P zusammen oder (der Index von P fällt zwischen n und $n+1$ und) es werden B_nB_{n+1} durch AP getrennt. Damit ist jenes graphische Theorem des § 15 (Seite 120) erwiesen, welches auf dem damaligen Standpunkte nicht aus graphischen Sätzen deducirt werden konnte, und es schliessen sich daran ohne Weiteres alle übrigen graphischen Sätze an, welche wir in den §§ 15—18 abgeleitet haben. — Die Paare pq und rs sind für a äquivalent unter der Bedingung

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\nu}, \quad \text{oder } \frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}.$$

Um alle Sätze des § 21 auf irrationale Indices ausdehnen zu können, bemerken wir, dass

$$\overset{apq}{\operatorname{ind}}\, r = \overset{rqp}{\operatorname{ind}}\, a = \frac{(\varkappa-\mu)\lambda}{(\varkappa-\lambda)\mu} = \frac{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}},$$

und definiren für beliebige Lage der fünf Punkte:

$$\overset{a}{\operatorname{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ pq \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}},$$

so dass

$$\overset{a}{\operatorname{ind}}\begin{pmatrix} pr \\ pq \end{pmatrix} = \overset{apq}{\operatorname{ind}}\, r$$

und mithin, wenn für a die Paare pq und rt äquivalent sind:

$$\overset{a}{\operatorname{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ pq \end{pmatrix} = \overset{a}{\operatorname{ind}}\begin{pmatrix} rs \\ rt \end{pmatrix} = \overset{art}{\operatorname{ind}}\, s,$$

eine Erklärung, welche man für die in § 21 betrachteten Punktreihen leicht mit der dort gegebenen in Uebereinstimmung bringt. Die in § 21 gegebenen Sätze werden jetzt auch für nicht durchweg rationale Indices als gültig erkannt, zunächst in der Punktreihe, in Folge dessen aber auch im Strahlen- und Ebenenbüschel. Dadurch kommen schliesslich auch in § 22 die Beschränkungen in Wegfall, wonach die Coordinatenverhältnisse rationale Zahlen sein

mussten und nur diejenigen Elemente durch Coordinaten darstellbar waren, welche sich aus den das Coordinatensystem bestimmenden Elementen durch gewisse Constructionen ergeben. Der Coordinatenbegriff wird derart erweitert, dass aus irgend fünf Punkten, von denen keine vier in einer Ebene liegen, ein Coordinatensystem gebildet werden kann, wobei die Doppelverhältnisse in jedem Coordinatensysteme in gleicher Weise aus den Coordinaten berechnet werden und die Bedingung des Aneinanderliegens von Punkt und Ebene immer die nämliche Gestalt besitzt.

Die Stammbegriffe der projectiven Geometrie haben durch die vorstehenden Festsetzungen diejenige umfassendere Bedeutung erlangt, auf welche am Ende des 15ten Paragraphen hingewiesen wurde. Um den dort besprochenen Satz aufstellen zu können, bedarf es nur noch der Bestimmung, dass

8. wenn $a\ b\ c$ eigentliche Punkte auf einer Geraden sind, c zwischen a und b gelegen, jeder durch a und b nicht von c getrennte Punkt der Geraden ab ein „Punkt der Strecke ab“ oder ein „zwischen a und b gelegener Punkt“ und

9. wenn d und e Punkte der Strecke ab sind, jeder durch d und e von a oder b getrennte Punkt f der Geraden ab ein „zwischen d und e gelegener Punkt“ genannt wird.

Von den Punkten der Strecke ab gelten die Sätze 6.—18. und die Definition 4. des ersten Paragraphen; zum Beweise kann man die Indices im Netze abc einführen, wobei die Punkte der Strecke ab allen positiven Werthen entsprechen und der Index von f zwischen die Indices von d und e fällt (vgl. § 21 Seite 176). Nehmen wir nun innerhalb einer geraden Strecke AB den uneigentlichen Punkt E, und setzen wir voraus, dass auf der Geraden AB Punkte $A_1 A_2 A_3 \ldots$ in unbegrenzter Anzahl definirt werden. Im Netze ABE seien $a_1 a_2 a_3 \ldots$ die Indices der Punkte $A_1 A_2 A_3 \ldots$; diese positiven Zahlen besitzen eine positive untere Grenze c, derart dass keine jener Zahlen unter den Werth c sinkt, dass aber, wenn d irgend eine über c gelegene Zahl bedeutet, nicht alle Zahlen $a_1 a_2 a_3 \ldots$ über d liegen. Ordnet man den Indices c und d die Punkte C und D zu, so fällt C entweder nach B oder zwischen A und B; kein Punkt der Reihe $A_1 A_2 A_3 \ldots$ liegt zwischen B und C; zwischen A und D liegen nicht alle Punkte der Reihe. Damit ist der in § 15 Seite 125 f. formulirte Satz bewiesen, zugleich aber auch der allgemeinere:

Sind drei Elemente ABF in einem einförmigen Gebilde gegeben, und kann man in diesem Gebilde Elemente $A_1 A_2 A_3 \ldots$ in unbegrenzter Anzahl definiren, welche von F durch A und B

getrennt werden, so existirt ein von F durch A und B getrenntes oder mit B identisches Element C, derart dass, wie immer das von F und A durch C getrennte Element D in dem Gebilde gelegen sein mag, nicht alle Elemente der Reihe $A_1 A_2 A_3 \ldots$ durch A und D von F getrennt werden, während kein Element der Reihe durch B und C von F getrennt wird.

Diesen Satz kann man beispielsweise bei der Aufsuchung der Doppelelemente einer Involution im einförmigen Gebilde anwenden. Die Involution ist durch zwei Elementenpaare bestimmt; liegen die Paare getrennt, so sind keine Doppelelemente vorhanden (§ 16 Seite 131). Demnach seien etwa auf einer Geraden h die Punktepaare $a\alpha$, $b\beta$ in nicht getrennter Lage gegeben; die Paare $a\beta$, $b\alpha$ mögen getrennt liegen. Nimmt man auf h den Punkt c zwischen

$a \quad b \quad c \quad f \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha$

b und β für den Grenzpunkt a und nennt γ den homologen Punkt in der durch die Paare $a\alpha$, $b\beta$ bestimmten Involution, so liegt für a auch γ zwischen b und β (§ 16 Seite 131), folglich γ entweder zwischen b und c oder zwischen c und β. Fassen wir nur diejenigen Lagen von c in's Auge, bei denen das letztere eintritt, und nennen wir f den durch diese Punktmenge nach dem vorstehenden Satze bestimmten Punkt der Geraden h zwischen b und β, so liegt f zwischen c und γ (denn zwischen β und γ liegt kein Punkt c); jedem Punkte zwischen b und f entspricht in der Involution ein Punkt zwischen β und f, und umgekehrt; folglich entspricht f sich selbst, ebenso (§ 16 Seite 131) der vierte harmonische Punkt g zu $a\alpha f$. *Sind also in einem einförmigen Gebilde zwei nicht getrennte Elementenpaare gegeben, so besitzt die dadurch bestimmte Involution zwei Doppelelemente.* Die Frage nach den Doppelelementen zweier aufeinanderliegenden einförmigen Gebilde, welche projectiv, aber weder äquivalent noch involutorisch sind, lässt sich auf den Fall der Involution zurückführen; denn solche Doppelelemente müssen zugleich Doppelelemente der durch die gegebene Projectivität nach dem letzten Satze des § 16 bestimmten Involution werden, und umgekehrt*).

Zu demselben Ergebniss bezüglich der Involution führt die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(ab\beta x)$ und $(\alpha\beta b\xi)$ für conjugirte Elemente $x\xi$. Setzt man zur Abkürzung die negative Grösse $(a\beta b\alpha) = -m$, so wird

$$(ab\beta x) = 1 - (a\beta bx),$$

*) Vgl. Zeitschrift f. Math. u. Phys., Jahrg. 27 S. 124.

$$(\alpha\beta b\xi) = \frac{(\alpha\beta b a)}{(\alpha\beta\xi a)} = \frac{1+m}{1-(a\beta\xi\alpha)} = \frac{1+m}{1+\frac{m}{(a\beta b\xi)}},$$

$$\bigl(1-(a\beta bx)\bigr)\bigl(m+(a\beta b\xi)\bigr) = (1+m)(a\beta b\xi).$$

Wird x ein Doppelpunkt, werden also $(a\beta bx)$ und $(a\beta b\xi)$ einer und derselben Zahl φ gleich, so kommt: $\varphi^2 + 2m\varphi = m$ und

$$\varphi = -m \pm \sqrt{m(m+1)}.$$

Diese beiden Werthe von φ sind die Coordinaten der Doppelpunkte f und g im Netze $a\beta b$. Da $m(m+1) < (1+m)^2$, so entspricht dem oberen Zeichen ein Werth $(a\beta bf)$ zwischen 0 und 1, dem unteren ein Werth $(a\beta bg) < -m$.

Beide Werthe sind im Allgemeinen irrational, und es entsteht daher die Frage, was dieselben geometrisch zu bedeuten haben. Dabei können wir uns auf den Fall beschränken, wo die gegebenen Punkte a, α, b, β eigentliche Punkte einer Geraden sind; m ist dann eine positive rationale Zahl und bezeichnet, als Index im Netze $a\beta b$ aufgefasst, die Lage des Punktes α oder eines von α nicht merklich verschiedenen Punktes, der für die weitere Betrachtung an Stelle von α tritt. Der Index von f in jenem Netze

$$(a\beta bf) = x, \quad \text{wo } 0 < x < 1,$$

ist im Allgemeinen irrational, aber auch wenn er rational ist, so kann es vorkommen, dass er mehr Constructionen verlangt, als die Figur auszuführen gestattet. Man bestimme nun die positive ganze

f e_1
a b A_v B_v e_2 β α

Zahl λ so gross, dass der dem Index λ im Netze $\beta a b$ entsprechende Punkt e_1 mit β eine Strecke begrenzt, welche nicht grösser ist, als die auf Seite 188 definirte Strecke MN. Wenn im Netze $a\beta e_1$ den Indices 2, 3, ... die Punkte e_2, e_3, ... entsprechen, so ist

$$(a\beta b e_1) = \frac{1}{\lambda}, \quad (a\beta b e_2) = \frac{2}{\lambda}, \quad (a\beta b e_3) = \frac{3}{\lambda}, \cdots;$$

die Gebilde $ae_1\beta e_2$, $ae_2e_1e_3$, $ae_3e_2e_4$, ... sind harmonisch, und nach § 14 Seite 117 sind die Strecken e_1e_2, e_2e_3, ... kleiner als die Strecke βe_1, folglich auch kleiner als MN. In der Reihe

$$0, \frac{1}{w}, \frac{2}{w}, \ldots, \frac{w-1}{w}, 1$$

seien a_w, $a_w + \frac{1}{w}$ diejenigen Zahlen, zwischen denen x liegt, A_w und B_w seien die entsprechenden Punkte, und in der Reihe 2, 3,

. . ., λ sei v die erste Zahl, für welche die Strecke $A_v B_v$ nicht grösser als MN ausfällt. Ist dann x unter den Zahlen

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{v},\ \frac{2}{v},\ \ldots,\ \frac{v-1}{v}$$

nicht anzutreffen, so nenne man f' einen eigentlichen Punkt zwischen A_v und B_v; von den mit A_v und B_v in der Involution conjugirten Punkten liegt einer ausserhalb der Strecke $A_v B_v$, der andere — etwa der mit A_v conjugirte — fällt zwischen A_v und B_v und ist also nicht merklich von f' verschieden. Da hiernach $A_v f'$ annähernd als ein Paar der Involution zu betrachten sind, so ist f' von seinem conjugirten Punkte nicht merklich verschieden und hat wenigstens annähernd die Eigenschaften des Punktes f. Deshalb wird bei der Anwendung der analytischen Geometrie der eigentliche Punkt, den wir vorhin f' genannt haben, geradezu mit f bezeichnet und als der dem Index x entsprechende Punkt, also als Doppelpunkt der Involution angesehen. — Nach der Auseinandersetzung auf Seite 189 lässt sich dieses Ergebniss auf beliebige Involutionen in einförmigen Gebilden übertragen.

Um die berührte Frage allgemein aufzufassen, nehme ich an, dass auf analytischem Wege ein Punkt f ermittelt sei, welcher zu einer durch eigentliche Elemente eines Netzes ΑΒΓΔΕ (vgl. S. 190) gegebenen Figur in einer vorgeschriebenen projectiven Beziehung steht. Wir haben dann für jenen Punkt Coordinaten $f_1 f_2 f_3 f_4$, deren Verhältnisse reell sind, aber nicht rational, oder doch zur genauen Construction nicht geeignet zu sein brauchen. Das vorausgeschickte Beispiel mag genügen, um erkennen zu lassen, dass immer ein eigentlicher oder durch eigentliche Strahlen darstellbarer Punkt existirt, welcher zur gegebenen Figur genau oder annähernd in der verlangten Beziehung steht. Dieser Punkt wird bei der Anwendung der analytischen Geometrie geradezu mit f bezeichnet und als der geometrische Repräsentant des Werthsystemes $f_1 f_2 f_3 f_4$ angesehen.

Die gegebene Figur kann um den jetzt mit f bezeichneten Punkt erweitert und die erweiterte Figur von Neuem der analytischen Behandlung unterworfen werden. Sucht man aber den ursprünglichen Bestimmungen gemäss Coordinaten im Netze ΑΒΓΔΕ zu ermitteln, so fallen deren Verhältnisse nicht immer rational aus und brauchen jedenfalls mit den Verhältnissen der Zahlen $f_1 f_2 f_3 f_4$ — welche wir doch soeben als Coordinaten von f hingestellt haben — nicht übereinzustimmen. Der hierin gelegene Widerspruch wird nur dadurch gehoben, dass wir der Ungenauigkeit, welche den Coordinaten anhaftet, gehörig Rechnung tragen. Jede Coordinaten-

bestimmung wurde auf die Aufgabe zurückgeführt, in der Verbindungslinie zweier eigentlichen Punkte B, E die Lage des zwischen B und E gelegenen eigentlichen Punktes p durch einen Index im Netze ABE darzustellen, wobei wir A ausserhalb der Strecke BE annahmen. Waren $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$ die Indices zweier eigentlichen Punkte h' und k', zwischen denen p liegt, derart dass innerhalb der Strecke $h'k'$ einzelne Punkte nicht mehr von einander unterschieden werden können, und liess sich zu der zwischen $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$ gelegenen rationalen Zahl ξ ein eigentlicher Punkt construiren, so war derselbe von p nicht merklich verschieden, und wir nahmen deshalb ξ als Coordinate von p im Netze ABE. Diese Bestimmung müssen wir jetzt dahin erweitern, dass jede zwischen $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$ gelegene — rationale oder irrationale — Zahl ξ' mit gleichem Rechte als Coordinate von p genommen werden kann; denn sucht man ξ' auf die vorhin erörterte Weise innerhalb der Strecke BE darzustellen, so gelangt man zu einem von p nicht merklich verschiedenen Punkte. Dadurch ordnen wir dem Punkte p eine stetige Folge von Zahlen zu, deren jede die Lage von p mit hinreichender Genauigkeit wiedergiebt; und die Coordinatenverhältnisse überhaupt erhalten, indem jedes aus einer gewissen Zahlenfolge willkürlich entnommen werden darf, diejenige Unbestimmtheit, welche durch die am Schluss der Einleitung schon hervorgehobene Ungenauigkeit der geometrischen Begriffe bedingt wird. Die Rechnung folgert aus gegebenen Zahlenrelationen andere, welche mit jenen unbedingt zusammenbestehen, und bringt aus gegebenen Zahlen andere hervor, welche vorgeschriebenen Beziehungen zu den gegebenen Zahlen vollkommen genau entsprechen; aber die Uebertragung der Figur in Zahlen und die Rückkehr von den Rechnungsresultaten zur Figur kann nicht mit gleicher Genauigkeit erfolgen.

Wir haben im Vorstehenden nur graphische Constructionen in Betracht gezogen, aber die mit dem Begriff der Congruenz zusammenhängenden sind nicht minder mit Ungenauigkeit behaftet. Bezeichnet man, wie in § 20 Seite 162, mit $ABDEaa'$ eigentliche Punkte einer Ebene, derart dass Aaa' in einer Geraden, A zwischen a und a', B und D auf einerlei Seite der aa', a und E auf verschiedenen Seiten der AB liegen, aB und AD auf aa' senkrecht stehen und die Figuren ABa, BAE congruent sind, so fällt in der Euklidischen Geometrie der Schenkel AE mit dem Schenkel

AD zusammen, in der Gauss'schen fällt er zwischen die Schenkel AD und Aa, in der Riemann'schen zwischen die Schenkel AD und Aa'. Danach ist das Doppelverhältniss $A(BDaE)$ entweder Null oder negativ oder positiv. Der Versuch lehrt, dass die Schenkel AD und AE zusammenfallen oder doch nicht merklich auseinandergehen. Wir sind daher berechtigt, den Werth jenes Doppelverhältnisses, den Index des Strahles AE im Netze $A(BDa)$, aus einer stetigen Folge von positiven und negativen Zahlen, welche in gewisser Nähe der Null liegen, beliebig zu entnehmen; aber wir sind nicht genöthigt, ihn genau gleich Null zu setzen, wie es die Euklidische Geometrie verlangt, welche freilich für die von uns betrachteten Figuren (vgl. § 1 Seite 18) hinreichende Genauigkeit besitzt.

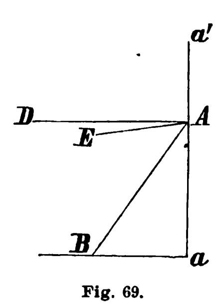


Fig. 69.

Berichtigungen.

Seite 37, Ueberschrift, lies „Strahlenbündel" statt „Ebenenbündel".
„ 64, Ueberschrift, lies „Anwendung" statt „Anwenduug".
„ 119, Fussnote, lies „Calcul" statt „Calcül".
„ 185 Z. 9 v. o. lies p_1 statt p_2.
„ „ Z. 11 v. o. lies p_2 statt p_1.

Inhaltsverzeichniss.

Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel.

Soeben erschien und ist von **B. G. Teubner** in Leipzig durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

OEUVRES COMPLÈTES
DE
NIELS HENRIK ABEL.

NOUVELLE ÉDITION
PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN
PAR
MM. L. SYLOW et S. LIE.

2 TOMES. 4. ℳ 24.—

TOME PREMIER, CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL.
TOME SECOND, CONTENANT LES MÉMOIRES POSTHUMES D'ABEL.

CHRISTIANIA 1881.

Leipzig, Kommissions-Verlag von B. G. Teubner.

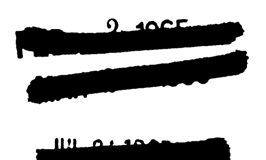
Inhalt:

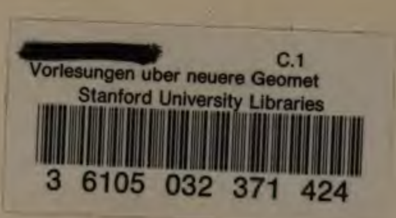
Tome I [VIII u. 621 S.]. 1. Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables. — 2. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. — 3. Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. — 4. L'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ exprimée par une intégrale définie simple. — 5. Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes. — 6. Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f\big(z, f(x, y)\big)$ est une fonction symétrique de z, x et y. — 7. Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré. Appendice. Analyse du mémoire précédent. — 8. Remarque sur le mémoire No. 4 du premier cahier du Journal de M. Crelle. — 9. Résolution d'un problème de mécanique. — 10. Démonstration d'une expression de la quelle la formule binôme est un cas particulier. — 11. Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières. — 12. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. — 13. Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données. — 14. Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$. — 15. Sur quelques intégrales définies. — 16. Recherches sur les fonctions elliptiques. — 17. Sur les fonctions qui satisfont à l'équation $\varphi x + \varphi y = \psi(x f y + y f x)$. — 18. Note sur mémoire de M. L. Olivier, ayant pour titre „Remarques sur les séries infi

et leur convergence". — 19. Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques. — 20. Addition au mémoire précédent. — 21. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. — 22. Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationnelle dont le dégré est un nombre premier donné. — 23. Théorème générale sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. — 24. Note sur quelques formules elliptiques. — 25. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. — 26. Théorèmes sur les fonctions elliptiques. — 27. Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes. — 28. Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. — 29. Théorèmes et problèmes.

Tome II [IV u. 341 S.]. 1. Les fonctions transcendantes $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, $\cdots\Sigma\frac{1}{a^n}$ exprimées par des intégrales définies. — 2. Sur l'intégrale définie $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$. — 3. Sommation de la série $y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n$, n étant un nombre entier positif fini ou infini, et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationelle de n. — 4. Sur l'équation différentielle $dy+(p+qy+ry^2)dx=0$, où p, q et r sont des fonctions de x seul. — 5. Sur l'équation différentielle $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0$. — 6. Détermination d'une fonction au moyeu d'une équation qui ne contient qu'une seule variable. — 7. Propriétés remarquables de la fonction $y=\varphi x$ déterminée par l'équation $fy\,.\,dy-dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\cdots(a_m-y)}=0$, fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y=a$, $a_1, a_2, \cdots a_m$. — 8. Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. — 9. Extension de la théorie précédente. — 10. Sur la comparaison des fonctions transcendantes. — 11. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. — 12. Sur quelques intégrales définies. — 13. Théorie des transcendantes elliptiques. — 15. Note sur la fonction $\psi x=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$. — 15. Démonstration de quelques formules elliptiques. — 16. Sur les séries. — 17. Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme: $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique de x. — 18. Sur la résolution algébrique des équations. — 19. Fragmens sur les fonctions elliptiques. — 20. Extraits de quelques lettres à Holmboe. — 21. Extrait d'une lettre à Hansteen. — 22. Extraits de quelques lettres à Crelle. — 23. Lettre à Legendre. Aperçu des manuscrits d'Abel conservés jusqu'à présent. Notes aux mémoires du tome I. Notes aux mémoires du tome II. Table pour faciliter la recherche des citations.







C.1
Vorlesungen uber neuere Geomet
Stanford University Libraries
3 6105 032 371 424

